

Ю. В. ЛАПИН
М. Х. СТРЕЛЕЦ

ВНУТРЕННИЕ
ТЕЧЕНИЯ
ГАЗОВЫХ
СМЕСЕЙ



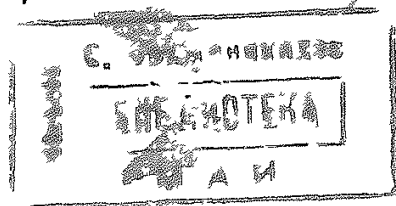
Ю. В. ЛАПИН
М. Х. СТРЕЛЕЦ

ВНУТРЕННИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

К

3934

1448-58



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Условные обозначения	8
Глава 1. Уравнения динамики вязкого многокомпонентного реагирующего газа	11
§ 1 Введение	11
§ 2 Газодинамические уравнения Векторы плотности потоков	14
2.1 Газодинамические уравнения, выраженные через векторы плотности потоков (14) 2.2 Тензор давлений Тензор скоростей деформации Вязкость газов и газовых смесей (15) 2.3 Диффузионные потоки и коэффициенты диффузии в многокомпонентных смесях Соотношения Стефана — Максвелла (19) 2.4 Тепловой поток, коэффициенты теплопроводности в многокомпонентных смесях (24) 2.5 Различные формы уравнений динамики вязкого многокомпонентного реагирующего газа (28)	
§ 3 Краткие сведения по кинетике химических реакций	32
Глава 2. Математические модели и методы расчета внутренних течений вязких газовых смесей	35
§ 4 Введение	35
§ 5 Моделирование внутренних течений на основе полной системы уравнений Навье — Стокса для многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей	36
5.1 Безразмерная форма уравнений Критерии подобия (36) 5.2 Граничные условия (40) 5.2.1 Условия на твердых стенках (41) 5.2.2 Условия на оси (плоскости) симметрии (42) 5.2.3 Условия на «входе» и «выходе» (48) 5.3 О конечно-разностных методах численного интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса (48) 5.3.1 Общая характеристика методов (49) 5.3.2 Особенности методов расчета течений с малыми числами Маха (57) 5.3.3 Особенности методов расчета неравновесных течений с быстропротекающими химическими реакциями (60) 5.3.4 Методы расчета диффузионных потоков в многокомпонентных газовых смесях на основе соотношения Стефана — Максвелла (63)	
§ 6 Приближенные модели внутренних течений газовых смесей	65
6.1 Предварительные замечания (65) 6.2 Приближенные модели гипозвуковых течений со сложной структурой (66) 6.2.1 Приближение Буссинеска и модель вязкой несжимаемой жидкости (70) 6.2.2 Модели существенно дозвуковых течений многокомпонентных газовых смесей при наличии произвольных изменений плотности (79) 6.2.3 О методах расчета дозвуковых течений в рамках приближенных моделей (87) 6.3 Параболизированные модели внутренних течений вязких газовых смесей (88) 6.3.1 Приближение пограничного слоя (88) 6.3.2 Приближение узкого канала (92) 6.3.3 Параболизированные уравнения Навье — Стокса (97) 6.3.4 О методах расчета внутренних течений на основе параболизированных моделей (99) 6.4 Приближенные методы описания процессов молекулярного переноса и физико-химических превращений в газовых смесях (105)	

Глава 3. Турбулентные течения газовых смесей	141
§ 7. Введение. О проблемах моделирования турбулентных течений	141
§ 8. Способы описания турбулентных течений: осреднение по Рейнольдсу, осреднение по Фавру	120
§ 9. Уравнения турбулентного движения многокомпонентных реагирующих газовых смесей	125
9.1. Уравнения для первых моментов (126). 9.2. Уравнения для вторых моментов (132).	
§ 10. Уравнения турбулентного пограничного слоя в многокомпонентном реагирующем газе	135
10.1. Общие соображения (135). 10.2. О структуре турбулентных пограничных слоев (136). 10.3. Уравнения пограничного слоя (149).	
§ 11. Полуэмпирические гипотезы турбулентности для замыкания уравнений для первых моментов	154
11.1. Тензор турбулентных напряжений. Гипотеза Буссинеска (155). 11.2. Гипотеза локальности механизма турбулентного переноса. Формула Прандтля, Формула Кармана (156). 11.3. Взаимодействие процессов молекулярного и турбулентного переноса вблизи твердой поверхности (эффективная вязкость). Демпфирующий фактор в теории Прандтля (160). 11.4. Гипотезы турбулентности для внешней области турбулентного пограничного слоя (166).	
§ 12. Модификация гипотезы Клаузера для равновесных и неравновесных турбулентных пограничных слоев	169
12.1. Общие соображения (169). 12.2. Турбулентная вязкость в равновесных пограничных слоях (170). 12.3. Структура равновесных пограничных слоев (173). 12.4. Локально неравновесные пограничные слои (175).	
§ 13. Полуэмпирические гипотезы турбулентности для замыкания уравнений для вторых моментов	181
13.1. Общие соображения (181). 13.2. Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности (182). 13.3. Уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности (185). 13.4. Экспериментальные данные о характеристиках турбулентности вблизи стенки (187). 13.5. Двупараметрические ($k - \varepsilon$)-модели турбулентного пограничного слоя (190).	
§ 14. О некоторых результатах исследований внутренних турбулентных течений	196
14.1. Однородные по составу газы и нереагирующие газовые смеси (196). 14.2. Течения с химическими реакциями (204).	
§ 15. Турбулентные потоки массы и энергии. Эффективная и турбулентная теплопроводность и диффузия в пограничном слое	208
§ 16. О численных методах расчета турбулентных течений газовых смесей	212
Глава 4. Дозвуковые течения в плоских и осесимметричных каналах	215
§ 17. Введение	215
§ 18. Метод расчета стационарных двумерных течений химически реагирующих газовых смесей на основе приближения узкого канала	216
18.1. Преобразование исходной системы уравнений (216). 18.2. Конечно-разностная схема и алгоритм расчета химически неравновесных течений (222). 18.3. Алгоритм расчета химически равновесных течений (228). 18.4. Расчет турбулентных режимов течения (229).	
§ 19. Границы применимости приближения узкого канала для численного моделирования стационарных дозвуковых течений в плоских и осесимметричных каналах	229
19.1. Предварительные замечания (229). 19.2. Изотермическое течение на начальном участке трубы постоянного сечения с непроницаемыми стенками (230). 19.3. Течение в трубе с пористыми стенками при наличии вдува (234). 19.4. Течение в канале с внезапным расширением и в канале постоянного сечения при наличии отсоса через пористые стенки (237). 19.5. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными (245).	

Глава 5	Течения в полости резонаторов сверхзвуковых химических лазеров непрерывного действия	253
§ 20	Введение	253
§ 21	Постановка задач о расчете ламинарного течения в полости резонаторов сверхзвуковых НФ-НХЛ на основе полных уравнений Навье — Стокса	255
	21.1 Основные физические допущения (255) 21.2 Система уравнений и граничные условия (259)	
§ 22	Метод расчета	266
	22.1 Преобразование исходной системы уравнений к форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам (266)	
	22.2 Конечно-разностная схема и алгоритм расчета (269) 22.3 Оценка адекватности используемой математической модели и эффективности вычислительного алгоритма (280)	
§ 23	Границы применимости приближения узкого канала для анализа процессов в резонаторах сверхзвуковых НХЛ	285
	23.1 Ламинарный режим течения в полости резонатора (285) 23.2 Турбулентный режим течения в полости резонатора (294)	
Глава 6	Существенно дозвуковые внутренние течения со сложной структурой при наличии конечных изменений плотности	302
§ 24	Введение	302
§ 25	Методы расчета дозвуковых течений газовых смесей на основе модели СДТ	303
	25.1 Конечно-разностная схема и алгоритм расчета нестационарных течений (303) 25.2 Конечно-разностная схема и алгоритм расчета стационарных течений (310)	
§ 26	Границы применимости приближенных моделей гипозвуковых течений	318
	26.1 Модель СДТ (318) 26.1.1 Нестационарная естественная конвекция в замкнутом объеме (318) 26.1.2 Стационарная вынужденная конвекция в каналах (321) 26.2 Приближение Буссинеска (325) 26.2.1 Естественная конвекция в замкнутом объеме (326) 26.2.2 Смешанная конвекция бинарной газовой смеси (332)	
	Список литературы	341

ПРЕДИСЛОВИЕ

Электронно-вычислительные машины открыли широкие возможности для решения многих нелинейных задач механики сплошных сред. Математическое моделирование активно внедряется в практику научных, прикладных и опытно-конструкторских разработок. Это обстоятельство не в последнюю очередь привело к тому, что в научной монографической литературе по механике жидкости и газа при рассмотрении тех или иных проблем в последние годы довольно отчетливо прослеживается тенденция к смещению акцентов в сторону вопросов математического моделирования (выбор численного метода решения поставленной задачи, составление алгоритма решения и т. д.), в то же время обоснованию физической модели рассматриваемых явлений нередко должного внимания не уделяется.

Предлагаемая вниманию читателя монография представляет собой попытку совместного описания вопросов физического и математического моделирования применительно к внутренним течениям газовых смесей.

В монографии последовательно излагаются методы численного моделирования широкого круга внутренних вязких (ламинарных) и турбулентных течений инертных и химически реагирующих газовых смесей. Рассматриваются как общие проблемы, возникающие при математическом описании таких течений, так и частные вопросы, связанные с расчетом характеристик конкретных потоков. В частности, описываются постановка и эффективные численные алгоритмы решения задач о течениях газовых смесей в каналах постоянного и переменного сечения. Излагаются методы численного моделирования существенно дозвуковых потоков при наличии значительных пространственно-временных изменений плотности (внутренние задачи вынужденной, естественной и смешанной конвекции газовых смесей) и методы расчета сверхзвуковых внутренних течений с учетом химической и колебательной неравновесности и когерентного излучения (течения в резонаторах сверхзвуковых непрерывных химических лазеров).

С учетом большой практической важности моделирования турбулентных течений значительное внимание уделено различным аспектам этой сложной проблемы. Наряду с обзором современных

достижений в этой области дается описание моделей турбулентности для замыкания уравнений для первых моментов (алгебраических) и моделей для замыкания уравнений для вторых моментов (многопараметрических). В частности, детально анализируются широко применяемые при исследовании внутренних течений двухпараметрические модели, основанные на использовании уравнений переноса кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации.

Во всех случаях приводятся оценки границ применимости наиболее распространенных приближенных методов описания рассматриваемых процессов, а возможности обсуждаемых моделей и численных алгоритмов иллюстрируются конкретными примерами.

При написании книги широко использовались результаты исследований, полученные сотрудниками кафедры гидроаэродинамики Ленинградского политехнического института им. М. И. Калинина и группы газодинамики Государственного института прикладной химии. В частности, опытом, накопленным в этих коллективах, определяется отбор излагаемых в монографии численных алгоритмов решения тех или иных задач. Подобный принцип отбора неизбежно приносит элементы субъективности в оценки и рекомендации, которые, естественно, могут быть улучшены, а со временем и пересмотрены.

Авторы выражают глубокую благодарность Льву Герасимовичу Лойцянскому за постоянный интерес к их работе, полезные обсуждения многих рассматриваемых в книге проблем.

Авторы искренне признательны своим коллегам — сотрудникам кафедры гидроаэродинамики ЛПИ им. М. И. Калинина и группы газодинамики Государственного института прикладной химии за большую помощь на всех этапах работы над книгой, а также доктору физ.-мат. наук Ю. М. Давыдову, прочитавшему книгу в рукописи, за интересные и полезные оценки и замечания.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Буквы латинского алфавита

- A_k — химические символы реагирующих веществ,
 c_f — местный коэффициент трения,
 c_i — массовая концентрация i -й компоненты,
 c_k^* — концентрация k -го элемента в смеси,
 c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении,
 c_{pi} — удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном давлении,
 c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме,
 c_{vi} — удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном объеме,
 $\mathcal{D}$ — демпфирующий фактор,
 $D_{1,}$ — коэффициент диффузии многокомпонентной смеси,
 $\mathcal{D}_{1,}$ — коэффициент диффузии бинарной смеси,
 $\mathcal{D}_i$ — эффективный коэффициент диффузии,
 D_i^T — коэффициент термодиффузии,
 $\mathcal{D}_t$ — коэффициент турбулентной диффузии,
 Da — число Дамкелера,
 E — внутренняя энергия газа,
 F_z — вектор плотности объемных сил,
 Fr — число Фруда,
 g — вектор ускорения под действием силы тяжести,
 g_{is} — массовая скорость образования i -й компоненты на единичной поверхности в результате протекания s -й гетерогенной поверхностной химической реакции,
 H — полная энтальпия смеси,
 $H = \delta^*/\delta^{**}$ — формпараметр пограничного слоя,
 h — энтальпия смеси,
 h_i — энтальпия i -й компоненты,
 h_i^0 — теплота образования i -й компоненты при стандартных условиях,
 i — номер компоненты,
 J_i — вектор плотности потока массы i -й компоненты (диффузионный поток i -й компоненты),
 J_{ij}^T — турбулентный поток массы i -й компоненты в направлении оси j ,
 k — постоянная Больцмана,
 k_c — постоянная Клаузера,
 k — кинетическая энергия турбулентности,
 k_{Ti} — термодиффузионные отношения,
 K_n, K_p, K_x, K_c — константы равновесия,
 k', k'' — константы скоростей прямой и обратной реакции в газовой фазе,
 l — турбулентный путь перемешивания, масштаб турбулентности,
 m — молекулярный вес смеси,
 m_f — интенсивность вдува (отсоса) вещества через пористую стенку,

m_i — молекулярный вес i -й компоненты,
 M — число Маха,
 n — число молей в единице объема,
 n_i — число молей i -и компоненты в единице объема,
 n_1, n_2 — порядок прямой и обратной поверхностных реакций,
 N_A — число Авогадро,
 N_k — число компонент смеси,
 N_s — число химических элементов, образующих смесь,
 p — давление смеси,
 p_i — парциальное давление i -й компоненты,
 P — тензор давлений смеси,
 Pr — число Прандтля,
 Pr^S — число Прандтля, построенное по полным параметрам,
 Pr_t — турбулентное число Прандтля,
 $Pr_{эф}$ — эффективное число Прандтля,
 q — вектор плотности потока тепла,
 q_j^T — турбулентный поток энергии по оси j ,
 R — универсальная газовая постоянная, локальное число Рейнольдса,
 R_0 — газовая постоянная,
 Re — число Рейнольдса,
 r — радиус-вектор с проекциями x, y, z ,
 r_0 — радиус поперечной кривизны тела вращения,
 Sc — число Шмидта,
 Sc_t — турбулентное число Шмидта,
 Sh — число Струхала,
 $S(S_{jk})$ — тензор скоростей деформаций,
 T — температура газа,
 t — время,
 v — вектор среднemasсовой скорости,
 V_i — скорость диффузии i -й компоненты,
 v_* — динамическая скорость,
 u — составляющая скорости по оси x ,
 v — составляющая скорости по оси y ,
 w — составляющая скорости по оси z ,
 w_i — массовая скорость образования i -й компоненты,
 x_i — мольная концентрация i -и компоненты

Буьвы греческого алфавита

α — эмпирическая постоянная турбулентности,
 β — параметр равновесности Клаузера,
 γ — эмпирическая постоянная турбулентности, коэффициент перемешиваемости,
 $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты,
 δ — толщина пограничного слоя,
 δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя,
 δ^{**} — толщина потери импульса,
 δ_{jk} — символ Кронекера,
 ε — скорость диссипации энергии турбулентности,
 ε — единичный тензор,
 ε_i — параметр потенциальной функции межмолекулярного взаимодействия для частиц i -го сорта,
 η — переменная «закона стенки»,
 κ — эмпирическая постоянная турбулентности,
 λ — коэффициент молекулярной теплопроводности смеси,
 λ_i — коэффициент теплопроводности чистого одноатомного газа i -го сорта,
 λ_t — коэффициент турбулентной теплопроводности,

μ — коэффициент динамической вязкости смеси;
 μ_i — коэффициент динамической вязкости i -й компоненты;
 μ_t — коэффициент турбулентной вязкости;
 ν — коэффициент кинематической вязкости;
 ν_t — кинематический аналог турбулентной вязкости;
 ν'_k, ν''_k — стехиометрические коэффициенты химической реакции;
 ρ — плотность газа (смеси);
 ρ_i — парциальная плотность i -й компоненты;
 σ_i — диаметр столкновений частицы i -го сорта;
 τ — напряжение трения;
 τ_{jk} — тензор вязких напряжений;
 τ^T_{jk} — тензор турбулентных напряжений;
 φ — переменная «закона стенки».

Нижние индексы

e — параметры на внешней границе пограничного слоя;
 m — параметры на границе внутренней и внешней области турбулентного пограничного слоя;
 ∞ — параметры на бесконечности в набегающем потоке;
 l — параметры на границе вязкого подслоя;
 $-$ (знак минус) — условия внутри пористой стенки;
 t — параметры в турбулентном потоке;
 w — параметры на стенке;
 $эф$ — эффективные параметры (вязкость, теплопроводность).

Верхние индексы

Σ — полные потоки массы, тепла (сумма молекулярного и турбулентного потоков);
 t — параметры в турбулентном потоке;
 $-$ черта сверху — осреднение по времени;
 $\sim$ волнистая черта сверху — средневзвешенные величины;
 $\text{один штрих } (')$ — пульсационная составляющая величины при осреднении по Рейнольдсу;
 $\text{два штриха } (')$ — пульсации величин при использовании «средневзвешенного» осреднения по Фавру.

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО МНОГОКОМПОНЕНТНОГО РЕАГИРУЮЩЕГО ГАЗА

§ 1. Введение

Развитие ракетной и космической техники, атомной энергетики, химической технологии, а в последние годы газовых лазеров обусловило большой и устойчивый интерес к проблемам движения вязкого многокомпонентного химически реагирующего газа.

Сегодня более, чем когда-либо ранее, становится очевидным, что многие проблемы, в частности, проблемы создания мощных газодинамических и химических лазеров не могут успешно решаться без детального теоретического анализа газодинамических процессов переноса во всех элементах этих устройств. Попытки применения традиционных эмпирических (на основе только опытного моделирования) подходов к решению этих проблем на практике оборачиваются, как правило, большими и малоэффективными затратами материальных и человеческих ресурсов, приводят к существенному замедлению темпов создания и внедрения высокоэффективных промышленных технологий.

Если применительно к внешним задачам авиационной, ракетной и космической техники необходимость учета таких факторов, как многокомпонентность среды и химические реакции, связана с переходом к движению с очень большими сверхзвуковыми скоростями, то для широкого класса внутренних задач указанные факторы, как правило, оказываются «запрограммированными» заранее.

В первом случае, т. е. при движении газа с большими сверхзвуковыми скоростями, температура среды в отдельных областях, например в скачках уплотнения (переход механической энергии в тепло за счет ударного сжатия) и пограничных слоях (переход механической энергии в тепло за счет вязкой диссипации), повышается настолько, что в газе начинают протекать термохимические процессы, приводящие к расщеплению молекул газа на более простые частицы (диссоциация), распаду молекул и атомов на ионы и электроны (ионизация), образованию окислов и других химических соединений. В некоторых случаях, например при входе космических объектов в плотные слои атмосферы Земли и других планет, необходимо учитывать процессы, происходящие на поверхности обтекаемых тел, такие как оплавление и испарение поверхностного слоя тела, сублимация, химические реакции между компонентами наружной среды и тела и т. д.

Во втором случае (внутренние задачи), т. е. при движении газовых сред в химических реакторах, соплах и резонаторах газодинамических и химических лазеров и других устройствах, химические реакции и процессы обмена энергией между колебательными, вращательными, электронными и поступательными степенями свободы молекул являются основными, необходимыми составными частями технологического процесса, определяющими его работоспособность и эффективность в целом. Это обстоятельство многократно повышает требования к детализации описания газодинамических и физико-химических процессов в таких устройствах по сравнению с аналогичными проблемами внешнего обтекания. Если при решении проблем внешнего обтекания можно обычно ограничиться интегральными (суммарными) оценками некоторых параметров, например тепловых потоков по обводу тела, то при анализе течений в химических реакторах необходима достоверная информация не только о полях скоростей, температур, давлений, но и концентраций отдельных компонент смеси, а для течений в газодинамических и химических лазерах — и о распределении в пространстве молекул, находящихся в различных квантовых состояниях. Если учесть, что экспериментальные методы диагностики таких течений еще только начинают разрабатываться, то становится очевидным, сколь высокие требования необходимо предъявлять к математическим моделям таких течений, способам их реализации на ЭВМ и ресурсам быстродействия и памяти ЭВМ.

Нерелятивистские (со скоростями, существенно меньшими скорости света) движения сплошной среды подчиняются фундаментальным законам и теоремам классической механики и термодинамики: законам сохранения материи и энергии, а также теореме об изменении главного вектора количества движения.

Применение указанных фундаментальных законов и теорем для феноменологического описания движения сплошной среды приводит к системе уравнений переноса массы отдельных компонент смеси и смеси в целом, количества движения и энергии. Однако такой (феноменологический) подход к описанию течений многокомпонентных смесей с химическими реакциями во многих случаях оказывается недостаточно эффективным, поскольку основывается на постулировании определенных соотношений между градиентами некоторых величин, характеризующих движущуюся среду, и «потокowymi» параметрами, например, между градиентом скорости и напряжением трения (закон Ньютона), градиентом температуры и тепловым потоком (закон Фурье), градиентом концентраций и диффузионным потоком (закон Фика для бинарной смеси) и т. д. При этом коэффициенты переноса, т. е. коэффициенты пропорциональности в указанных соотношениях (в законах Ньютона, Фурье, Фика и т. д.), отражающие определенные свойства молекул газа и характер их взаимодействия, входят в феноменологическую теорию как известные наперед параметры, которые частично могут быть опреде-

лены из соотношений взаимности Онзагера, частично из эксперимента. Указанная ограниченность феноменологического подхода к описанию течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей выдвинула на передний план методы кинетической теории газов.

Принципиально важным результатом этой теории следует считать вывод уравнений гидрогазодинамики на основе уравнения Больцмана, что позволило установить непрерывную связь между микро- и макропроцессами, с одной стороны, и указать границы применимости этих уравнений — с другой. Чрезвычайную практическую значимость при исследовании течений многокомпонентных смесей химически реагирующих газов приобретает возможность вычисления теоретически на основе уравнения Больцмана коэффициентов переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) как функций температуры, давления газовой смеси, молекулярных весов компонент и параметров, описывающих законы межмолекулярного взаимодействия.

Результаты решения уравнений Больцмана для смеси разреженных газов (без учета тройных столкновений) изложены в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1] (см. также монографию Ферцигера и Капера [2]).

Коэффициенты вязкости и теплопроводности для смеси газов, состоящих из частиц, не обладающих внутренними степенями свободы, а также коэффициенты диффузии в бинарной смеси и коэффициенты термодиффузии получены в [1] с точностью до интегралов столкновений, зависящих от потенциалов межмолекулярного взаимодействия. Там же указаны способы вычисления интегралов столкновений для некоторых частных видов потенциала взаимодействия. Следует, однако, отметить, что полученные в [1] соотношения Стефана — Максвелла для расчета диффузионных потоков включают коэффициенты диффузии в бинарной смеси, вычисленные в первом приближении при разложении решений по полиномам Сонина, а коэффициенты термодиффузии — во втором. В этом смысле соотношения Стефана — Максвелла в [1] являются неравномерно точными. В работах Г. А. Тирского [3], А. Ф. Колесникова и Г. А. Тирского [4] получены точные (в любом приближении метода Чепмена — Энскога решения уравнений Больцмана) соотношения Стефана — Максвелла. Указанная выше непоследовательность в соотношениях Стефана — Максвелла [1] не приводит к существенным погрешностям при рассмотрении смесей электронейтральных компонентов, и эти соотношения могут быть рекомендованы к широкому практическому использованию (они будут приведены ниже).

Наличие химических реакций в газе может привести к нарушению равновесного распределения энергии по Больцману. В общем случае коэффициенты переноса в смесях химически реагирующих газов должны вычисляться из соответствующих кинетических урав-

нений с интегралами столкновений, учитывающими «химическую» неравновесность. Имеющиеся оценки влияния химических реакций на коэффициенты переноса (Г. Я. Герасимов [5, 6]) показывают, что это влияние мало и в практических расчетах им можно пренебречь. Обсуждение некоторых других аспектов кинетического описания течений смесей реагирующих газов можно найти в обзоре Э. А. Гершбейна, С. В. Пейгина, Г. А. Тирского [7].

§ 2. Газодинамические уравнения.

Векторы плотности потоков

2.1. Газодинамические уравнения, выраженные через векторы плотности потоков. Основные газодинамические уравнения — уравнения переноса массы отдельных компонент и смеси, количества движения и энергии — могут быть получены непосредственно из уравнения Больцмана без определения вида функции распределения. Эти уравнения оказываются, однако, незамкнутыми, поскольку в них входят неизвестные выражения векторов плотностей потоков массы, количества движения и энергии. Для определения указанных величин необходимо решить уравнение Больцмана. Процедура получения газодинамических уравнений, выраженных через векторы плотности потоков, подробно описана в монографиях Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1], Ферцигера и Капера [2], а также в монографии Ю. В. Лапина [8]. Отсылая читателя, интересующегося деталями вывода уравнений, к указанным работам, приведем так называемую естественную форму этих уравнений: уравнение неразрывности для смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

уравнение неразрывности для i -й компоненты

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} = w_i - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_i, \quad (1.2)$$

уравнение движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{P} \right) + \sum_{i=1}^{N_h} c_i \mathbf{F}_i, \quad (1.3)$$

уравнение энергии

$$\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \left(\mathbf{P} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v} + \rho \sum_{i=1}^{N_h} c_i \mathbf{F}_i \mathbf{V}_i. \quad (1.4)$$

Здесь и далее введены обозначения: t — время; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор с проекциями x, y, z ; $\mathbf{v}$ — среднемассовая скорость (гидродинамическая); $\mathbf{V}_i$ — скорость диффузии i -й компоненты; ρ — плотность смеси; c_i — массовая концентрация i -й компоненты; w_i — массовая

скорость образования i -й компоненты; J_i — вектор плотности потока массы i -й компоненты (диффузионный поток i -й компоненты); P — тензор давлений смеси; F_i — вектор плотности внешних объемных сил; E — внутренняя энергия газа; q — вектор плотности потока энергии (тепловой поток); i — номер компоненты; N_k — число компонент смеси; точкой обозначено скалярное произведение двух векторов.

К этой системе необходимо добавить уравнение состояния для смеси

$$p = \rho RT \sum_{i=1}^{N_k} \frac{c_i}{m_i}. \quad (1.5)$$

Здесь p — давление, T — температура, R — универсальная газовая постоянная, m_i — молекулярный вес i -й компоненты.

Система уравнений (1.1) — (1.4) содержит вектор плотности потока массы i -й компоненты J_i , тензор давлений P , вектор плотности потока энергии q , зависимость которых от пространственных производных от макроскопических величин и коэффициентов переноса должна быть найдена в результате решения уравнения Больцмана. Вид коэффициентов переноса также находится из решения уравнения Больцмана.

Вопросу получения решений уравнения Больцмана посвящена обширная литература. Помимо уже упоминавшихся монографий Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1], Ферцигера и Капера [2], укажем монографии Чепмена и Каулинга [9] и М. Н. Когана [10]. Ниже будут рассмотрены результаты решения уравнения Больцмана методом возмущений Энского — Чепмена, полученные Кертиссом и Гиршфельдером [11] и изложенные в монографии [1]. Принципиальное значение для оценки результатов работы [11], относящихся к коэффициентам диффузии в многокомпонентных смесях, имеет работа Кертисса [12].

2.2. Тензор давлений. Тензор скоростей деформаций. Вязкость газов и газовых смесей. Выражение для тензора давлений имеет вид [1]

$$P = p\epsilon - 2\mu\dot{S}, \quad (1.6)$$

где

$$p = \rho R_0 T \quad (1.7)$$

— равновесное статическое давление при местной температуре и плотности частиц; R_0 — газовая постоянная;

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

— единичный тензор; μ — коэффициент динамической вязкости; $\dot{S}$ — тензор скоростей деформаций, типичные диагональные и не-

диагональные элементы которого определяются выражениями

$$\dot{S}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad S_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right), \quad (1.9)$$

где $v_x, v_y, \dots$ — проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на соответствующие оси координат $x, y, \dots$.

Диагональные и недиагональные элементы тензора давлений равны

$$\begin{aligned} P_{xx} &= p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} - 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}, \\ P_{xy} &= -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из равенств (1.10) видно, что тензор давлений отличается от обычно рассматриваемого в механике сплошных сред [13] тензора напряжений только знаком.

Введенный выше коэффициент динамической вязкости для N_k -компонентной газовой смеси определяется выражением [1]

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & \dots & H_{N1} & x_1 \\ H_{12} & H_{22} & \dots & H_{N2} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{1N} & H_{2N} & \dots & H_{NN} & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_{11} & H_{21} & \dots & H_{N1} \\ H_{12} & H_{22} & \dots & H_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{1N} & H_{2N} & \dots & H_{NN} \end{vmatrix}}, \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} H_{ii} &= \frac{x_i^2}{\mu_i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_k} \frac{2x_i x_k}{\mu_{ik}} \cdot \frac{m_i m_k}{(m_i + m_k)^2} \left(\frac{5}{3A_{ik}^*} + \frac{m_k}{m_i} \right), \\ H_{ij} &= \frac{2x_i x_j}{\mu_{ij}} \frac{m_i m_j}{(m_i + m_j)^2} \left(\frac{5}{3A_{ij}^*} - 1 \right), \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$x_i = n_i/n$ — мольная концентрация i -й компоненты; n_i — числовая плотность i -й компоненты; $n = \sum_{i=1}^{N_k} n_i$; μ_i — коэффициент вязкости i -й компоненты, равный

$$\mu_i = 266,93 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{m_i T}}{\sigma_i^2 \Omega_i^{(2,2)*} (T_i^*)} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}, \quad (1.13)$$

σ_i — диаметр столкновения; $T_i^* = kT/\varepsilon_i$ — характеристическая температура; ε_i/k — параметр потенциальной функции межмолекуляр-

ного взаимодействия; $\Omega_i^{(2,2)*}$ — интеграл соударений для переноса импульса, выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые шары, для которой $\Omega_i^{(2,2)*} = 1$; k — постоянная Больцмана; μ_{ij} — коэффициент, определяемый выражением *)

$$\mu_{ij} = 266,93 \cdot 10^{-7} \frac{\sqrt{2m_i m_j T / (m_i + m_j)}}{\sigma_{ij}^2 \Omega_{ij}^{(2,2)*}(T_{ij}^*)} \frac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}}, \quad (1.14)$$

где $\Omega_{ij}^{(2,2)*}(T_{ij}^*)$ — интеграл соударений i -й и j -й компонент для переноса импульса.

Входящая в равенства (1.12) величина A_{ij}^* равна $A_{ij}^* = \Omega_{ij}^{(2,2)*} / \Omega_{ij}^{(1,1)*}$, где $\Omega_{ij}^{(1,1)*}(T_{ij}^*)$ — интеграл соударений для переноса масс, выражающий меру отклонения от модели, рассматривающей молекулы газа как твердые шары, для которой $\Omega_{ij}^{(1,1)*} = 1$; $T_{ij}^* = = kT / \epsilon_{ij}$ — характеристическая температура; ϵ_{ij} / k — параметр потенциальной энергии молекул, характеризующий взаимодействие молекул i -го и j -го сортов; σ_{ij} — эффективный диаметр столкновений молекул. Значения интегралов соударений $\Omega_{ij}^{(2,2)*}$ и $\Omega_{ij}^{(1,1)*}$ приведены в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1].

В равенстве (1.12) недиагональные элементы H_{ij} обычно малы по сравнению с диагональными элементами H_{ii} . Чтобы недиагональные элементы точно были равны нулю, необходимо положить $A_{ij} = = 5/3$. Если это же самое предположение использовать для диагональных элементов, то (1.11) приобретает вид

$$\mu = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{x_i^2}{H_{ii}} = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{x_i^2}{\frac{x_i^2}{\mu_i} + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_k} \frac{x_i x_k}{\mu_{ik}} \frac{m_k}{m_i + m_k}}. \quad (1.15)$$

Для практического использования приведенных соотношений необходимо знание силовых постоянных σ_i и ϵ_i . Для некоторых веществ значения этих постоянных для потенциала Леннарда — Джонса приведены в книге Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1]. Подробная информация о тех же постоянных для молекул более чем двухсот веществ содержится в работе Свелы [14]. В табл. 1.1 приводятся значения силовых постоянных из работы [14] для компонент диссоциированного воздуха, а также некоторых других веществ.

) Значения функции $\Omega_i^{(2,2)}(T_i^*)$ в широком диапазоне изменения T_i^* приведены в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1].

Параметры σ_{ij} и ε_{ij} могут быть приближенно вычислены по простым комбинаторным правилам

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_i + \sigma_j), \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j}. \quad (1.16)$$

Интегралы соударений $\Omega^{(1.1)*}$ и $\Omega^{(2.2)*}$, вычисленные и затабулированные в [1] на основе потенциала Леннарда — Джонса, могут быть

Таблица 1.1

	O ₂	N ₂	O	N	NO	N ₂ O
$\sigma_i, \text{\AA}$	3,467	3,798	3,050	3,298	3,492	3,828
$\varepsilon_i/k, \text{K}$	106,7	71,4	106,7	71,4	116,7	232,4
	H ₂	H ₂ O	CO	CO ₂	C	H
$\sigma_i, \text{\AA}$	2,827	2,641	3,690	3,941	3,385	2,708
$\varepsilon_i/k, \text{K}$	59,7	809,1	91,7	195,2	30,6	37,0

с достаточной для многих практических приложений точностью определены по следующим приближенным формулам, полученным Н. А. Анфимовым [15]:

$$\Omega^{(1.1)*} = 1,074T^{*-0,1604}, \quad \Omega^{(2.2)*} = 1,157T^{*-0,1472}. \quad (1.17)$$

Формула (1.15) может быть записана в виде

$$\mu = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\mu_i}{1 + 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_k} \frac{x_k}{x_i} \cdot \frac{\mu_i}{\mu_{ik}} \cdot \frac{m_k}{m_i + m_k}}. \quad (1.18)$$

Если пренебречь различием в интегралах соударений $\Omega_i^{(2.2)*}(T_i^*)$ и $\Omega_{ij}^{(2.2)*}(T_{ij}^*)$, т. е. принять их отношение равным единице ($\Omega_{ij}^{(2.2)*} = \Omega_i^{(2.2)*}$), то после подстановки в правую часть (1.18) вместо μ_i и μ_k соотношений (1.13) и (1.14) и простых преобразований с учетом первого из равенств (1.16) получим формулу, предложенную Уилки [16]:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N_k} \mu_i \left(1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_k} G_{ik} \frac{x_k}{x_i} \right)^{-1}, \quad (1.19)$$

где μ_i — коэффициент вязкости i -й компоненты (1.13), x_k, x_i — моль-

ные концентрации k -й и i -й компонент, G_{ik} — функция, выражаемая равенством

$$G_{ik} = \frac{[1 + (\mu_i/\mu_k)^{1/2} (m_k/m_i)^{1/4}]^2}{2^{3/2} [1 + (m_i/m_k)]^{1/2}}. \quad (1.20)$$

Формула Уилки (1.19) широко применяется в практических расчетах вязкости многокомпонентных газовых смесей.

Для пересчета массовой концентрации $c_i = \rho_i/\rho$ в мольную x_i можно воспользоваться выражением

$$x_i = \frac{c_i m}{m_i}, \quad m = \left(\sum_{i=1}^{N_k} \frac{c_i}{m_i} \right)^{-1}, \quad (1.21)$$

ρ_i — парциальная плотность i -й компоненты, m — молекулярный вес смеси.

Обширные данные по вязкости чистых газов и их смесей собраны в монографии Бредшнайдера [17].

2.3. Диффузионные потоки и коэффициенты диффузии в многокомпонентных смесях. Соотношения Стефана — Максвелла. В монографии Гиршфельдера, Кертисса, Берда [1] в результате решения уравнения Больцмана получено следующее выражение для вектора плотности потока массы i -й компоненты (диффузионного потока) в смеси, состоящей из N_k компонент:

$$\mathbf{J}_i = \rho c_i \mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{m_i m_j}{m^2} D_{ij} \mathbf{d}_j - D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{d}_j = \frac{\partial x_j}{\partial \mathbf{r}} + (x_j - c_j) \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} - \frac{c_i}{p} \left(\rho \mathbf{F}_i - \sum_{j=1}^{N_k} \rho_j \mathbf{F}_j \right), \quad (1.23)$$

где D_{ij} и D_i^T — коэффициенты диффузии и термодиффузии многокомпонентной смеси соответственно, $\mathbf{V}_i$ — скорость диффузии i -й компоненты. Из соотношений (1.22) — (1.23) видно, что диффузия может возникать по следующим причинам: 1) под действием градиента концентрации (массовая диффузия), 2) под действием градиента давления (бародиффузия), 3) под действием градиента температур (термодиффузия) и 4) под действием массовых сил.

Входящие в соотношение (1.22) коэффициенты диффузии многокомпонентной смеси D_{ij} выражаются в виде определителей N_k -го порядка через $N_k(N_k - 1)/2$ (N_k — число компонент смеси) коэффициентов диффузии бинарной смеси $\mathcal{D}_{ij}$, а также концентрации и молекулярные веса компонент. Как отмечается в работе Кертисса [12], а также в монографии Ферцигера и Капера [2], коэффициенты D_{ij} , определенные в [1], являются несимметричными, т. е. $D_{ij} \neq D_{ji}$, что явилось следствием допущения о равенстве нулю коэффициен-

тов самодиффузии $D_{ii} = 0$. Асимметрия коэффициентов D_{ij} не согласуется с соотношением взаимности Онзагера. Это согласование, как указывается в работе [2], имеет важное значение для химически реагирующих газовых смесей и многоатомных газов, в которых осуществляются переходы между различными внутренними степенями свободы. Указанное замечание не относится к полученным в [1] и широко используемым в практических расчетах так называемым соотношениям Стефана — Максвелла.

В работе Кертисса [12] было получено следующее выражение для диффузионного потока i -й компоненты:

$$\mathbf{J}_i = \rho c_i \mathbf{V}_i = -\rho c_i \left(\sum_{j=1}^{N_k} D_{ij} \mathbf{d}_j + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right). \quad (1.24)$$

Здесь $\mathbf{d}_j$, так же как и в соотношении (1.22), выражается равенством (1.23); для коэффициентов диффузии в многокомпонентной смеси сохранены те же, что и в [1], обозначения D_{ij} ; однако коэффициенты термодиффузии многокомпонентной смеси, используемые в работах [1] и [12], отличаются множителем, выражающимся через парциальную плотность i -й компоненты (D_i^T в [1] и $\rho_i D_i^T$ в [12]).

Коэффициенты диффузии в многокомпонентной смеси в [12] (см. также [2]) определяются соотношениями

$$\sum_{i=1}^{N_k} \rho_i D_{ik} = 0, \quad (1.25)$$

$$\sum_{j=1}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} (D_{ik} - D_{jk}) = \delta_{ik} - c_i. \quad (1.26)$$

Здесь $\mathcal{D}_{ij}$ — коэффициенты диффузии в бинарной смеси, δ_{ik} — символ Кронекера ($\delta_{ik} = 1$ при $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$). Важно подчеркнуть, что определенные таким образом коэффициенты диффузии D_{ik} являются симметричными, т. е. $D_{ik} = D_{ki}$.

Равенство (1.26) можно представить в виде

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} D_{jk} \left(\frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} - \frac{x_i x_j D_{ik}}{\mathcal{D}_{ij} D_{jk}} \right) = c_i - \delta_{ik}. \quad (1.27)$$

Замечая, что из соотношения (1.25) следует

$$\rho_i D_{ik} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \rho_j D_{jk}, \quad (1.28)$$

приведем (1.27) к следующей удобной для практических расчетов

форме:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_h} \left(\frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} + \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{N_h} \frac{m_j x_j x_s}{m_i \mathcal{D}_{is}} \right) D_{jk} = c_i - \delta_{ik}. \quad (1.29)$$

Для бинарной смеси из (1.29) с учетом соотношения (1.24) получаются следующие выражения для коэффициентов диффузии:

$$D_{11} = \frac{m_1 m_2}{m^2} \frac{c_2}{c_1} \mathcal{D}_{12}, \quad (1.30)$$

$$D_{12} = - \frac{m_1 m_2}{m^2} \mathcal{D}_{12}, \quad (1.31)$$

$$D_{22} = \frac{m_1 m_2}{m^2} \frac{c_1}{c_2} \mathcal{D}_{12}. \quad (1.32)$$

Для смеси, состоящей из трех компонент, типичные коэффициенты диффузии имеют вид

$$D_{11} = \frac{m_3 c_1 c_3 \mathcal{D}_{23} \mathcal{D}_{31} + m_2 c_1 c_2 \mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{23} + m_1 (c_2 + c_3)^2 \mathcal{D}_{31} \mathcal{D}_{12}}{m_2 m_3 c_1 \mathcal{D}_{23} + m_1 m_3 c_2 \mathcal{D}_{31} + m_1 m_2 c_3 \mathcal{D}_{12}} \frac{m_1 m_2 m_3}{c_1^2 m^2}, \quad (1.33)$$

$$D_{12} = \frac{m_3 c_3 \mathcal{D}_{23} \mathcal{D}_{31} - m_2 (c_1 + c_3) \mathcal{D}_{12} \mathcal{D}_{23} - m_1 (c_2 + c_3) \mathcal{D}_3 \mathcal{D}_{12}}{m_2 m_3 c_1 \mathcal{D}_{23} + m_1 m_3 c_2 \mathcal{D}_{31} + m_1 m_2 c_3 \mathcal{D}_{12}} \frac{m_1 m_2 m_3}{m^2}. \quad (1.34)$$

Другие коэффициенты диффузии могут быть легко получены из (1.33) и (1.34) простой перестановкой индексов.

Соотношения Стефана — Максвелла. Скорость диффузии i -й компоненты V_i в соответствии с равенством (1.24) может быть представлена в форме

$$V_i = - \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} d_j - D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.35)$$

По аналогии скорость диффузии j -й компоненты имеет вид

$$V_j = - \sum_{i=1}^{N_h} D_{ij} d_i - D_j^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.36)$$

Вычитая из равенства (1.36) равенство (1.35), умножая полученный результат на величину $x_i x_j / \mathcal{D}_{ij}$ и производя суммирование по

j , будем иметь

$$\sum_{j=1}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) = - \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} (D_j^T - D_i^T) - \sum_{j=1}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} \left(\sum_{i=1}^{N_k} D_{ij} \mathbf{d}_i - \sum_{j=1}^{N_k} D_{ij} \mathbf{d}_j \right). \quad (1.37)$$

Второй член в правой части равенства (1.37), как нетрудно видеть, равен $\mathbf{d}_i$. Действительно, умножая обе части соотношения (1.26) на $\mathbf{d}_k$ и производя суммирование по k , найдем

$$\sum_{j=1}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} \left(\sum_{k=1}^{N_k} D_{ik} \mathbf{d}_k - \sum_{k=1}^{N_k} D_{jk} \mathbf{d}_k \right) = \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{d}_k \delta_{ik} - c_i \sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_i, \quad (1.38)$$

поскольку $\sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{d}_k = 0$.

Таким образом, с учетом равенства (1.38) соотношения (1.37), называемые соотношениями Стефана — Максвелла, принимают следующий вид:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) = \mathbf{d}_i - \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} (D_j^T - D_i^T), \quad (1.39)$$

где $\mathbf{d}_i$ выражается равенством (1.23). Независимые соотношения Стефана — Максвелла (1.39), число которых равно $N_k - 1$, являются основными для расчетов диффузионных потоков и широко используются на практике.

Расчет коэффициентов термодиффузии связан с необходимостью учета по крайней мере двух членов в разложениях по полиномам Сонина (второе приближение). Использование только одного члена приводит к нулевым значениям коэффициента термодиффузии; по этой причине о термодиффузии часто говорят как об эффекте второго порядка. Расчет коэффициентов термодиффузии сводится к решению систем линейных уравнений N_k -го порядка (N_k — число компонент смеси). Значения коэффициентов этой системы, выраженные через молекулярные веса, концентрации компонент и соответствующие интегралы соударений, приводятся в монографиях [1, 2]. В случае большого числа компонент смеси процедура нахождения коэффициентов термодиффузии D_i^T оказывается весьма сложной.

Если пренебречь термодиффузией, бародиффузией (в отсутствие объемных сил) по сравнению с массовой диффузией, то соотношения (1.39) упростятся и примут вид

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \frac{x_i x_j}{\mathcal{D}_{ij}} (\mathbf{V}_j - \mathbf{V}_i) = \frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.40)$$

Используя связь между мольными и массовыми концентрациями (1.21), преобразуем (1.40) к виду

$$\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \frac{c_i c_j m}{m_j \mathcal{D}_{ij}} (V_j - V_i) - \sum_{k=1}^{N_k} c_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \frac{c_i c_j m}{m_j \mathcal{D}_{kj}} (V_j - V_k). \quad (1.41)$$

Коэффициент диффузии бинарной смеси $\mathcal{D}_{ij}$ определяется выражением

$$\mathcal{D}_{ij} = 0,00268 \frac{T^{3/2} \sqrt{(m_i + m_j)/(2m_i m_j)} \text{ см}^2}{\rho \sigma_{ij}^2 \Omega_{ij}^{(1.1)*}(T_{ij}^*)} \frac{1}{c}. \quad (1.42)$$

Значение величин σ_{ij} , $\Omega_{ij}^{(1.1)*}$, T_{ij}^* было раскрыто ранее в пояснениях к формуле (1.14) (см. также соотношения (1.16)). Таблицы функции $\Omega_{ij}^{(1.1)*}(T_{ij}^*)$ для $0,3 \leq T_{ij}^* \leq 400$ приведены в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1]. Первая из формул (1.17) является хорошей аппроксимацией данных этих таблиц.

Из формулы (1.42) видно, что коэффициенты диффузии для бинарной смеси $\mathcal{D}_{ij}$ относительно нечувствительны к умеренным изменениям молекулярных весов компонентов. Поэтому если какая-либо газовая смесь состоит из двух групп компонентов, каждая из которых имеет примерно одинаковый атомный или молекулярный вес и примерно одинаковые поперечные сечения столкновений, то эту смесь можно рассматривать как «эффективную» бинарную смесь, в которой каждая группа действует как одна компонента. Следует, однако, иметь в виду, что при расчете переноса энергии необходимо строго различать энтальпии отдельных компонентов.

Для бинарной смеси из соотношений (1.24) и (1.23) с учетом равенств (1.30)–(1.32) нетрудно получить следующее выражение для диффузионного потока i -й компоненты:

$$\mathbf{J}_i = -\rho \mathcal{D}_{ij} \frac{m_i m_j}{m^2} \left[\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}} + (x_i - c_i) \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} \right] - \rho c_i D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.43)$$

Переходя в равенстве (1.43) от мольной концентрации x_i к массовой концентрации c_i по соотношению (1.21) и замечая, что для бинарной смеси

$$\frac{\partial x_i}{\partial \mathbf{r}} = \frac{m^2}{m_i m_j} \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}},$$

получим

$$\mathbf{J}_i = -\rho c_i \mathcal{D}_{ij} \left[\frac{\partial \ln c_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{m_j - m_i}{m} c_j \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} \right] - \rho c_i D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.44)$$

В течениях типа пограничного слоя вклад бародиффузии в перенос массы всегда пренебрежимо мал по сравнению с вкладом

массовой диффузии, так как давление постоянно поперек пограничного слоя. Термодиффузия является, как отмечалось выше, эффектом второго порядка по сравнению с массовой диффузией, поэтому термодиффузией также во многих случаях можно пренебречь. В этом случае равенство (1.44) принимает форму, известную под названием закона Фика:

$$\mathbf{J}_i = -\rho \mathcal{D}_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.45)$$

Следует, однако, иметь в виду, что в некоторых случаях, например в смесях легких и тяжелых компонент, вклад термодиффузии в перенос массы может стать достаточно заметным, и к указанной выше оценке следует относиться с известной осторожностью.

В тех случаях, когда к точности расчетов диффузионных потоков в многокомпонентных смесях не предъявляется жестких требований, вместо соотношений Стефана — Максвелла (1.41) нередко используют эффективные коэффициенты диффузии, введенные в практику расчетов Уилки [29].

Диффузионный поток i -й компоненты в многокомпонентной смеси формально можно представить в виде закона Фика (1.45)

$$\mathbf{J}_i = -\rho \mathcal{D}_i \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}},$$

где $\mathcal{D}_i$ — эффективный коэффициент диффузии, зависящий не только от молекулярных весов компонент, бинарных коэффициентов диффузии, но и от состава газа.

Согласно работе [29] эффективные коэффициенты диффузии могут быть определены по формуле

$$\mathcal{D}_i = \left(\frac{1}{m} - \frac{c_i}{m_i} \right) \left/ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_k} \frac{c_k}{m_k \mathcal{D}_{ki}} \right., \quad (1.46)$$

получившей наименование *формулы Уилки*.

2.4. Тепловой поток, коэффициенты теплопроводности в многокомпонентных смесях. Выражение для вектора плотности потока энергии (теплового потока) $\mathbf{q}$ в многокомпонентной смеси, полученное в результате решения уравнения Больцмана, имеет вид [2]

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{J}_i h_i + p \sum_{i=1}^{N_k} k_{Ti} \mathbf{V}_i. \quad (1.47)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности смеси, h_i — энтальпия i -й компоненты на единицу массы, k_{Ti} — термодиффузионные отношения, определяемые равенствами

$$\sum_{j=1}^{N_k} D_{ij} k_{Ti} = D_i^T, \quad \sum_{i=1}^{N_k} k_{Ti} = 0. \quad (1.48)$$

Выражение (1.47) первоначально было получено для смеси одноатомных (без внутренних степеней свободы) газов. Для смеси газов, состоящих из многоатомных молекул, выражение теплового потока имеет тот же вид, с тем отличием, что под энтальпией h_i следует подразумевать величину, учитывающую теплоемкость внутренних степеней свободы. В практических расчетах наиболее удобно использовать для h_i следующее выражение:

$$h_i = \int_{T_0}^T c_{pi} dT + h_i^0. \quad (1.49)$$

Здесь c_{pi} — удельная теплоемкость i -й компоненты при постоянном давлении, h_i^0 — теплота образования i -й компоненты при стандартных условиях. Для вычисления теплоемкостей и энтальпий отдельных компонент смеси удобно использовать аппроксимации, приведенные в [18]. Значения теплот образования некоторых веществ при нормальном давлении и стандартной температуре $T = 293$ К приводятся в табл. 1.2 [19].

Из выражения (1.47) видно, что в многокомпонентных смесях перенос энергии осуществляется посредством трех механизмов. Пер-

Таблица 1.2

i	O ₂	O	N ₂	N	NO
h_i^0 , кал/моль	0	59 548	0	112 974	21 600

i	H ₂	H	H ₂ O	CO	CO ₂
h_i^0 , кал/моль	0	52 096	—57 786	—26 425	—94 054

вый член в правой части (1.47) характеризует перенос энергии за счет теплопроводности, второй член — перенос энергии за счет переноса массы вещества посредством всех видов диффузии, третий член характеризует дополнительный поток энергии, обусловленный так называемым *диффузионным термоэффектом (эффект Дюфура)*.

В течениях типа пограничного слоя принято считать, что вклад диффузионного термоэффекта в перенос энергии обычно невелик, поэтому с достаточной для практики степенью точности можно принять для вектора плотности потока энергии в многокомпонентной смеси выражение

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N_h} \mathbf{J}_i h_i. \quad (1.50)$$

Выражение для коэффициента теплопроводности смеси одноатомных газов, состоящей из N_h компонент, полученное Кертиссом и Макенфуссом [20] в результате решения уравнения Больцмана в первом приближении, имеет вид [2]

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \dots & \Lambda_{N1} & x_1 \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{N2} & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1N} & \Lambda_{2N} & \dots & \Lambda_{NN} & x_N \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} & \dots & \Lambda_{N1} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{N2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{1N} & \Lambda_{2N} & \dots & \Lambda_{NN} \end{vmatrix}}. \quad (1.51)$$

Диагональные элементы определителей, входящих в соотношение (1.51), выражаются равенством

$$\Lambda_{ii} = \frac{x_i^2}{\lambda_i} + \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^{N_h} \frac{x_i x_h}{2A_{ih}^* \lambda_{ih}} \frac{\frac{15}{2} m_i^2 + \frac{25}{4} m_h^2 - 3m_h^2 B_{ih}^* + 4m_i m_h A_{ih}^*}{(m_i + m_h)^2}. \quad (1.52)$$

Недиагональные элементы определителей имеют вид

$$\Lambda_{ij} = \frac{x_i x_j m_i m_j}{2A_{ij}^* \lambda_{ij} (m_i + m_j)^2} \left(\frac{55}{4} - 3B_{ij}^* - 4A_{ij}^* \right). \quad (1.53)$$

Здесь λ_i — коэффициент теплопроводности чистого одноатомного газа:

$$\lambda_i = \frac{25 (\pi m_i R T)^{1/2}}{32 \pi \sigma_i \Omega_i^{(2,2)*} N_A} \cdot \frac{3R}{2m_i}, \quad (1.54)$$

N_A — число Авогадро.

Нетрудно видеть, что коэффициент λ_i связан с коэффициентом вязкости i -й компоненты μ_i , выражаемым равенством (1.13), простым соотношением

$$\lambda_i = \frac{5}{2} \mu_i c_{vi}, \quad c_{vi} = \frac{3}{2} \frac{R}{m_i}. \quad (1.55)$$

Коэффициент λ_{ij} имеет вид

$$\lambda_{ij} = \frac{25}{32} \frac{(2\pi m_{ij} R T)^{1/2}}{\pi \sigma_{ij} \Omega_{ij}^{(2,2)*} N_A} \frac{3R}{4m_{ij}}. \quad (1.56)$$

Входящие в выражение (1.56) величины определяются так же, как в формуле (1.14) для коэффициента μ_{ij} , с которым коэффициент

λ_{ij} связан соотношением

$$\lambda_{ij} = \mu_{ij} \frac{5}{2} \frac{3R}{m_{ij}^4}, \quad m_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}. \quad (1.57)$$

Коэффициенты A_{ij}^* , B_{ij}^* , C_{ij}^* выражаются равенствами

$$A_{ij}^* = \frac{\Omega_{ij}^{(2.2)*}}{\Omega_{ij}^{(1.1)*}}, \quad B_{ij}^* = \frac{5\Omega_{ij}^{(1.2)*} - 4\Omega_{ij}^{(1.3)*}}{\Omega_{ij}^{(1.1)*}}, \quad C_{ij}^* = \frac{\Omega_{ij}^{(1.2)*}}{\Omega_{ij}^{(1.1)*}}. \quad (1.58)$$

Интегралы соударений $\Omega_{ij}^{(1.1)*}$, $\Omega_{ij}^{(2.2)*}$, $\Omega_{ij}^{(1.2)*}$ и $\Omega_{ij}^{(1.3)*}$ как функции характеристической температуры T_{ij}^* затабулированы для потенциала Леннарда — Джонса в монографии Гиршфельдера, Кертисса и Берда [1]; для некоторых других потенциалов аналогичные таблицы даны в книге Ферцигера и Капера [2].

Существенно более простой способ определения коэффициента теплопроводности смеси одноатомных газов указали Масон и Саксена [21], предложившие формулу

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N_k} \lambda_i \left(1 + 1,065 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N_k} G_{ik} \frac{x_k}{x_i} \right)^{-1}, \quad (1.59)$$

где функция G_{ik} выражается равенством (1.20). Теми же авторами формула (1.59) была обобщена на смеси многоатомных газов. В этом случае в правую часть (1.59) вместо λ_i следует подставить коэффициент теплопроводности многоатомного газа λ'_i , связанный с λ_i с помощью уточненного поправочного множителя Эйкена [22]

$$\lambda'_i = \lambda_i \left(0,115 + 0,354 \frac{c_{pi}}{R_i} \right), \quad (1.60)$$

а вместо функции G_{ik} подставить функцию

$$G'_{ik} = \frac{[1 + (\lambda_i/\lambda_k)^{1/2} (m_i/m_k)^{1/4}]^2}{2^{3/2} [1 + (m_i/m_k)]^{1/2}}. \quad (1.61)$$

Величины c_{pi} и R_i , входящие в правую часть соотношения (1.60), являются коэффициентами удельной теплоемкости i -й компоненты при постоянном давлении и газовой постоянной для i -й компоненты соответственно.

Формула Масона и Саксены приводит к результатам, вполне удовлетворительно согласующимся с опытными данными для смесей одноатомных газов, а в ряде случаев — и для смесей многоатомных газов. Оценки точности этой формулы, а также других полуэмпирических соотношений можно найти в цитированных выше монографиях Ферцигера и Капера [2] и Бретшнайтера [17].

2.5. Различные формы уравнений динамики вязкого многокомпонентного реагирующего газа. Газодинамические уравнения переноса (1.1)–(1.4), выраженные через векторы плотности потоков, замыкаются с помощью приведенных выше выражений для тензора давлений (1.6), диффузионного потока (1.24) и вектора плотности потока энергии (теплового потока) (1.47). Проведем некоторые преобразования указанных уравнений.

Подставляя в уравнение движения (1.3) вместо тензора давлений его выражение (1.6), получим следующую основную форму этого уравнения *):

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + 2\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \dot{\epsilon} \right) + \rho \sum_{i=1}^{N_h} c_i \mathbf{F}_i. \quad (1.62)$$

В уравнении энергии (1.4) перейдем от внутренней энергии E к энтальпии h , связанной с нею формулой

$$h = E + p/\rho, \quad h = \sum_{i=1}^{N_h} c_i h_i, \quad (1.64)$$

одновременно заменив тензор давлений по (1.6), тогда будем иметь

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + 2\mu \left(\dot{S} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v} + \rho \sum_{i=1}^{N_h} c_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{V}_i. \quad (1.65)$$

Имея в виду равенство

$$\left(\dot{S} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \mathbf{v} = \dot{S}^2, \quad (1.66)$$

преобразуем уравнение (1.65) к виду

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + 2\mu \dot{S}^2 + \rho \sum_{i=1}^{N_h} c_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{V}_i. \quad (1.67)$$

Приведем еще одну форму уравнения энергии, легко получаемую из (1.4) с использованием уравнения движения (1.62):

$$\rho \frac{dH}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mu \dot{S} \mathbf{v}) + \rho \sum_{i=1}^{N_h} c_i \mathbf{F}_i \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{V}_i). \quad (1.68)$$

Величина

$$H = h + \frac{v^2}{2} \quad (1.69)$$

называется *полной энтальпией газа*.

*) Здесь и далее

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.63)$$

Если из объемных сил учитываются только силы тяжести $\mathbf{F}_i = \mathbf{g}$, то уравнение движения (1.62) принимает вид

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mu \dot{\mathbf{S}} + \rho \mathbf{g}. \quad (1.70)$$

Уравнение (1.67) вследствие обращения в нуль последнего члена справа $\left(\sum_{i=1}^{N_k} \rho c_i \mathbf{V}_i = 0 \right)$ упростится:

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + 2\mu \dot{\mathbf{S}}^2. \quad (1.71)$$

Окончательно система уравнений переноса в многокомпонентных химически реагирующих газовых смесях в поле силы тяжести может быть записана в виде:

уравнение неразрывности для смеси

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.72)$$

уравнение переноса количества движения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mu \left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \mathbf{e} \right) + \rho \mathbf{g}, \quad (1.73)$$

уравнение неразрывности i -й компоненты

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} = w_i - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_i, \quad (1.74)$$

уравнение переноса энергии

$$\rho \frac{dh}{dt} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + 2\mu \dot{\mathbf{S}}^2, \quad (1.75)$$

уравнение состояния

$$p = \rho R T \sum_{i=1}^{N_k} \frac{c_i}{m_i}. \quad (1.76)$$

Дополним эту систему выражениями вектора плотности потока i -й компоненты (диффузионного потока i -й компоненты)

$$\mathbf{J}_i = -\rho c_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_k} D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(c_j \frac{m}{m_j} \right) + c_j \frac{m - m_j}{m_j} \cdot \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} \right] + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} \right\} \quad (1.77)$$

и вектора плотности потока энергии (теплового потока)

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N_k} \mathbf{J}_i h_i + p \sum_{i=1}^{N_k} k_{Ti} \mathbf{J}_i / (\rho c_i). \quad (1.78)$$

Неопределенной пока величиной в системе уравнений (1.72) — (1.76) является массовая скорость образования i -й компоненты w_i ,

входящая в уравнение диффузии (1.74). Выражение, даваемое для величины w_i химической кинетикой, будет рассмотрено в следующем параграфе.

В ряде случаев оказывается удобной тензорная форма приведенных выше уравнений переноса. Тензорная форма предусматривает использование индексов для обозначения проекций величин на оси координат, причем дважды повторяющиеся индексы будут означать суммирование по значениям 1, 2, 3, соответствующим компонентам векторов и тензоров, соответственно по осям x, y, z (на индекс i , используемый для обозначения номера компоненты смеси, это правило не распространяется).

Уравнение неразрывности для смеси газов (1.72) в этих обозначениях имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j) = 0. \quad (1.79)$$

Уравнение неразрывности для i -й компоненты (1.74) преобразуем с помощью уравнения (1.79) к дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j c_i) = w_i - \frac{\partial}{\partial s_j} J_{ij}. \quad (1.80)$$

Здесь J_{ij} — проекция диффузионного потока i -й компоненты на ось j .

Для записи уравнений переноса количества движения (1.73) воспользуемся уравнением (1.79). При этом для удобства введем в рассмотрение тензор вязких напряжений

$$\tau_{jk} = 2\mu \dot{S}_{jk} = -\delta_{jk} \frac{2}{3} \mu \frac{\partial v_j}{\partial s_j} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k}{\partial s_j} \right), \quad (1.81)$$

где $\dot{S}_{jk}$ — тензор скоростей деформаций, определяемый соотношениями (1.9). В результате будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j v_k) = -\frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} + \rho g_k. \quad (1.82)$$

Уравнение переноса энергии (1.68) с учетом соотношения (1.81) и уравнения (1.79) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho h + \frac{1}{2} \rho v_k^2 \right) + \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\rho v_j h + \frac{1}{2} \rho v_j v_k^2 \right) = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q_j}{\partial s_j} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{jk} v_k) + \rho g_j v_j. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Используя уравнение движения (1.82), преобразуем уравнение (1.83) к следующей форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j h) = \frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial s_k} + \tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - \frac{\partial q}{\partial s_j}. \quad (1.84)$$

Возвращаясь к уравнениям диффузии для i -й компоненты (1.80), заметим, что для описания состава N_k -компонентной химически реагирующей газовой смеси необходимо использовать $N_k - 1$ уравнений диффузии и условие равенства единице суммы массовых концентраций компонент

$$\sum_{i=1}^{N_k} c_i = 1. \quad (1.85)$$

Если рассматриваемая N_k -компонентная смесь образована N_s химическими элементами, то число уравнений диффузии с источником членом можно без ущерба для строгости постановки задачи уменьшить на $N_s - 1$ уравнений, заменив недостающие $N_s - 1$ уравнений уравнениями диффузии для $N_s - 1$ элементов.

Введем в рассмотрение концентрацию k -го элемента в i -й компоненте

$$c_{ki} = m_k N_{ik} / m_i. \quad (1.86)$$

Здесь m_k — атомный вес k -го элемента, N_{ik} — число атомов k -го элемента в i -й компоненте, m_i — молекулярный вес i -й компоненты.

Умножая уравнение диффузии для i -й компоненты (1.80) на c_{ki} и производя суммирование по всем компонентам смеси, получим в общем случае N_s уравнений диффузии для N_s элементов

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c_k^*) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j c_k^*) = \frac{\partial}{\partial s_j} J_{kj}^*. \quad (1.87)$$

Здесь

$$c_k^* = \sum_{i=1}^{N_k} c_{ki} c_i \quad (1.88)$$

— концентрация k -го элемента смеси, а величина

$$J_{kj}^* = \sum_{i=1}^{N_k} c_{ki} J_{ij} \quad (1.89)$$

может быть названа диффузионным потоком k -го элемента в проекции на ось j .

Величина $w_i c_{ki}$ представляет собой массовую скорость перехода элемента k в состав компоненты i . Так как в процессе химической реакции масса элемента сохраняется, то

$$\sum_{i=1}^{N_k} c_{ki} w_i = w_k^* \equiv 0. \quad (1.90)$$

Одно из уравнений (1.87) может быть заменено более простым условием равенства единице суммы концентраций всех элементов:

$$\sum_{k=1}^{N_s} c_k^* = 1. \quad (1.91)$$

Таким образом, в рамках строгой постановки задача определения состава движущейся смеси сводится к необходимости интегрирования $N_k - N_s$ уравнений диффузии для компонент (1.80), $N_s - 1$ уравнений диффузии элементов (1.87) и использования условия (1.85) или эквивалентного ему условия (1.91).

§ 3. Краткие сведения по кинетике химических реакций

В необходимом для проведения газодинамических расчетов объеме сведения о кинетике химических реакций, протекающих в газовой фазе (гомогенных) и на твердых поверхностях (гетерогенных), приведены в монографии [8]. Здесь же ограничимся лишь тем, что приведем некоторые необходимые для дальнейшего соотношения.

Каждая химическая реакция протекает по закону постоянных кратных отношений и в общем виде может быть описана стехиометрическим уравнением:

$$\sum_{k=1}^{N_k} v'_k A'_k \xrightleftharpoons[k'']{k'} \sum_{k=1}^{N_k} v''_k A''_k, \quad (1.92)$$

где v'_k и v''_k — стехиометрические коэффициенты соответственно для реагентов (штрих) и продуктов реакции (два штриха), A_k — химические символы реагирующих веществ, N_k — общее число химических компонент, k' и k'' — константы скоростей соответственно прямой и обратной реакций, являющиеся функцией температуры.

Основным соотношением, описывающим скорость химической реакции (скорость образования или исчезновения i -й компоненты), является соотношение, даваемое законом действующих масс. В соответствии с законом действующих масс скорость образования химического вещества пропорциональна произведению концентраций реагирующих компонент, причем каждая концентрация входит в произведение в степени, равной соответствующему стехиометрическому коэффициенту.

Если в системе протекает несколько реакций одновременно, то для расчета суммарной скорости образования i -й компоненты можно воспользоваться принципом независимости отдельных реакций. Согласно этому принципу, если в системе протекает несколько реакций, то каждая из них протекает независимо от другой и каждая подчиняется закону действующих масс. Полная скорость образования i -й компоненты равняется сумме скоростей образования той же компоненты в каждой из реакций

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_{s=1}^{N_R} \left(\frac{dn_i}{dt} \right)_s = \sum_{s=1}^{N_R} k'_s (v''_{is} - v'_{is}) \prod_{k=1}^{N_k} n_k^{v'_{ks}} \left[1 - \frac{1}{K_{ns}} \prod_{k=1}^{N_k} n_k^{v''_{ks} - v'_{ks}} \right]. \quad (1.93)$$

Здесь n_i — число молей i -й компоненты в единице объема; k'_s —

константа скорости прямой реакции, K_{ns} — константа равновесия s -й химической реакции; N_R — число независимых реакций; s — номер реакции.

Константа равновесия $K_n(T)$ выражается равенством

$$K_n(T) = \frac{k'(T)}{k''(T)} = \prod_{h=1}^{N_h} n_h^{v_h'' - v_h'} \quad (1.94)$$

Для газа, состояние которого описывается уравнением Клапейрона, имеем

$$n_i = p_i / (RT). \quad (1.95)$$

В химической кинетике, наряду с константой равновесия K_n , выраженной через число молей (1.94), часто используются константы равновесия, выраженные через парциальные давления — K_p , мольные концентрации — K_x , массовые концентрации — K_c . Эти константы, выражаемые равенствами

$$K_p = \prod_{h=1}^{N_h} (p_h)^{v_h'' - v_h'}, \quad K_x = \prod_{h=1}^{N_h} (x_h)^{v_h'' - v_h'}, \quad K_c = \prod_{h=1}^{N_h} (c_h)^{v_h'' - v_h'}, \quad (1.96)$$

связаны между собой соотношениями

$$K_n = K_p (RT)^{-\Delta v} = K_x \left(\frac{p}{RT} \right)^{\Delta v} = K_c (\rho)^{\Delta v} \left(\prod_{h=1}^{N_h} m_h^{v_h'' - v_h'} \right)^{-1}. \quad (1.97)$$

Здесь

$$\Delta v = \sum_{h=1}^{N_h} (v_h'' - v_h'). \quad (1.98)$$

Зависимость констант равновесия от температуры и давления может быть определена методами статистической термодинамики [23—24].

Выражения для констант скоростей химических реакций могут быть получены либо по теории столкновений (теории Аррениуса [25—26]), либо по теории абсолютных скоростей реакций [27] (иногда теорию абсолютных скоростей реакций называют методом активированного комплекса).

На практике чаще всего пользуются выражением для констант скоростей

$$k = z(T) \exp(-E_a/RT), \quad (1.99)$$

введенным в практику Аррениусом. Значение предэкспоненциального множителя $z(T)$ обычно определяется опытным путем, а для некоторых не слишком сложных реакций может быть вычислена на основе теории абсолютных скоростей реакций [27].

В химической кинетике термин «гетерогенные» относится к реакциям, происходящим на поверхностях раздела, т. е. на границе

фаз. Возможные механизмы поверхностных реакций рассмотрены в работе [28] (см. также [8]).

Схематически уравнения поверхностных реакций можно записать в виде



где k_{wi} и k_{wj} — константы скоростей прямой и обратной поверхностных каталитических реакций. Выражение для скорости образования компоненты A_i , даваемое формальной кинетикой, можно представить в форме

$$g_{A_iw} = \frac{d[A_i]_w}{dt} = k_{wi}[A_i]_w^{n_i} - k_{wj}[A_j]_w^{n_j}, \quad (1.101)$$

где n_i и n_j — порядок прямой и обратной реакций соответственно, $[A_i]_w$ и $[A_j]_w$ — концентрации реагента и продукта реакции на стенке. Размерность констант скоростей k_{wi} (или k_{wj}) зависит от размерности концентраций реагента и продукта реакции.

Вводя в рассмотрение константу равновесия K_w :

$$K_w = \frac{k_{wj}}{k_{wi}} = \frac{[A_i]_w^{n_i}}{[A_j]_w^{n_j}}, \quad (1.102)$$

преобразуем равенство (1.101) к виду

$$g_{A_iw} = k_{wi} \{ [A_i]_w^{n_i} - K_w [A_j]_w^{n_j} \}. \quad (1.103)$$

В стационарных условиях скорость образования каждой компоненты равна диффузионному потоку этой компоненты к поверхности

$$J_{A_iw} = -k_{wi} \{ [A_i]_w^{n_i} - K_w [A_j]_w^{n_j} \}. \quad (1.104)$$

Соотношение (1.104) может быть использовано как граничное условие в решении газодинамических задач при наличии поверхностных каталитических реакций.

Зависимость константы k_{wi} от температуры во многих случаях хорошо описывается законом Аррениуса

$$k_{wi} = k_{0i} \exp(-E_{aw}/RT_w). \quad (1.105)$$

Здесь k_{0i} — константа исследуемой системы реагент — катализатор, E_{aw} — энергия активации. Отношение E_{aw} к универсальной газовой постоянной R можно рассматривать как «характеристическую» температуру T_{aw} системы реагент — катализатор.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКИХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

§ 4. Введение

Согласно существующим представлениям [30, 31] технология численного моделирования в газовой динамике включает в себя три тесно связанных между собой основных этапа: 1 — формулировку математической модели, т. е. системы дифференциальных уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями, описывающей рассматриваемое течение, 2 — разработку численного метода решения сформулированной системы уравнений, 3 — программную реализацию разработанного метода и проведение на ЭВМ численных исследований (вычислительного эксперимента), направленных на оценку адекватности используемой математической модели и изучаемого физического процесса, с одной стороны, и на определение количественных характеристик этого процесса — с другой.

В данной главе рассматриваются некоторые вопросы, относящиеся к первым двум этапам этой технологической цепочки применительно к внутренним течениям вязких газовых смесей. В частности, в ней приводится описание моделей внутренних течений, нашедших наиболее широкое применение, и обсуждаются различные аспекты существующих конечно-разностных методов численного интегрирования систем уравнений, лежащих в основе этих моделей. При этом основное внимание уделяется наиболее сложным, не нашедшим пока окончательного решения проблемам, находящимся в настоящее время в стадии интенсивного исследования. К числу таких проблем относится, в частности, проблема постановки граничных условий к системе уравнений Навье — Стокса на так называемых проницаемых границах расчетной области (входное и выходное сечения различных проточных технических устройств); состояние этой проблемы рассматривается в п. 5.2.3. Не менее важными с практической точки зрения являются более частные вопросы, связанные с разработкой эффективных методов численного интегрирования уравнений Навье — Стокса при расчете течений с малыми числами Маха и неравновесных течений с быстропротекающими физико-химическими процессами (пп. 5.3.2, 5.3.3), а также с преодолением специфических вычислительных трудностей, возникающих при расчете течений с обширными дозвуковыми зонами на ос-

нове параболизированных уравнений Навье — Стокса (п. 6.3.4). Наконец, отдельный п. 6.2 посвящен систематическому изложению полученных в последние годы важных результатов, связанных с построением приближенных моделей широко распространенных в технике существенно дозвуковых течений неизотермических вязких газовых смесей.

§ 5. Моделирование внутренних течений на основе полной системы уравнений Навье — Стокса для многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей

5.1. Безразмерная форма уравнений. Критерии подобия. Приведенная в гл. 1 система уравнений Навье — Стокса для многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей (1.72) — (1.78), (1.93) представляет собой, как отмечалось выше, наиболее общую систему уравнений движения вязких газовых смесей в режиме сплошной среды и обеспечивает адекватное описание подавляющего большинства как внутренних, так и внешних течений, представляющих практический интерес. Поэтому при непосредственном использовании этой системы для численного моделирования внутренних течений специфика последних проявляется лишь на стадии формулирования начальных и граничных условий, которые несут в себе информацию об особенностях рассматриваемого течения и тем самым позволяют выделить его из всего многообразия течений, описываемых системой уравнений (1.72) — (1.78), (1.93). Именно в связи с этим обстоятельством проблема задания граничных условий к системе уравнений Навье — Стокса является одной из центральных проблем вычислительной гидроаэродинамики [32].

Тем не менее некоторые особенности исследуемого класса течений могут быть выявлены уже на стадии получения безразмерной формы системы уравнений Навье — Стокса. Здесь уместно отметить, что использование при численном моделировании безразмерной формы записи исходных дифференциальных уравнений является во многих случаях чрезвычайно полезным. Прежде всего это позволяет несколько сократить число определяющих параметров рассматриваемой задачи по сравнению со случаем, когда используется ее размерная формулировка. Напомним, что в соответствии с Π -теоремой теории размерностей [33] число безразмерных комплексов N , характеризующих тот или иной физический процесс, связано с числом размерных определяющих параметров этого процесса n соотношением

$$N = n - m, \quad (2.1)$$

где m — число независимых первичных величин в рассматриваемой задаче (масса, длина, время и т. п.). Кроме того, использование безразмерной формы записи исходных уравнений и граничных ус-

ловий позволяет существенно снизить степень конкретизации решаемой задачи, поскольку результаты единичного расчета оказываются при этом справедливыми по отношению к бесконечному набору геометрически и физически подобных процессов. Последнее особенно важно, поскольку открывает возможность непосредственной обработки результатов численных параметрических исследований в критериальной форме (в этом отношении вычислительный эксперимент имеет очевидные преимущества перед физическим). Весьма важным с точки зрения рациональной организации вычислений является также и то, что при разумном и обоснованном выборе масштабов использование безразмерной формы записи позволяет привести все переменные величины к единой шкале, что значительно повышает точность расчетов на ЭВМ, проводимых с конечным числом значащих цифр. Наконец, на основе безразмерной формы записи уравнений Навье — Стокса оказывается более простой оценка относительной роли тех или иных эффектов в изучаемом процессе (оценка величин соответствующих членов безразмерных уравнений). Тем самым открывается возможность построения приближенных моделей, обеспечивающих более или менее адекватное описание тех или иных частных типов течений газовых смесей.

Перечисленные важные преимущества безразмерной формы записи исходных уравнений реализуются, как отмечалось выше, лишь в том случае, когда в качестве масштабов при выводе безразмерных уравнений используются характерные размерные параметры конкретного течения. Поэтому на данной стадии изложения приводимый ниже вывод безразмерных уравнений Навье — Стокса неизбежно носит несколько формальный характер, поскольку конкретное физическое содержание безразмерных комплексов (чисел подобия), входящих в полученную систему, может быть полностью раскрыто только после конкретизации масштабов, которая осуществляется в последующих разделах, посвященных рассмотрению различных частных классов внутренних течений.

Переходя к процедуре «обезразмеривания», выберем в качестве масштабов длины, времени, скорости, температуры, давления и молекулярного веса некоторые характерные значения этих величин l^0 , t^0 , u^0 , T^0 , p^0 и m^0 , а в качестве масштабов для физических свойств смеси, ее коэффициентов переноса и констант скоростей химических реакций — значения соответствующих величин, определенные при температуре T^0 , давлении p^0 и некотором характерном составе смеси: ρ^0 , c_p^0 , μ^0 , λ^0 , D^0 , k_s^0 , K_{ps}^0 . Масштабы всех остальных величин, входящих в систему уравнений (1.72) — (1.78), (1.93), построим по этим основным масштабам. Например, в качестве масштаба удельной энтальпии h^0 будем использовать величину $c_p^0 T^0$, диффузионного потока J^0 — величину $\rho^0 D^0 / l^0$ и т. п. Тогда, переходя в системе (1.72) — (1.78), (1.100) к безразмерным $\bar{\varphi} = \varphi / \varphi^0$ (φ — любая размерная переменная), получим следующую безразмерную

форму уравнений Навье — Стокса для многокомпонентных химических реагирующих газовых смесей

$$\text{Sh} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \left(\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \bar{\mathbf{v}} = \\ = - \frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mu} \left(\bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{e}} \right) + \frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Pr}} \frac{\mathbf{g}}{g} \bar{\rho}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{Sh} \bar{\rho} \frac{\partial c_i}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{s=1}^{NR} \text{Da}_s \bar{w}_{is} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{J}}_i, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \bar{\rho} \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{h}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\text{Sh} \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{r}} \right) - \\ - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{q}} + \frac{2(\gamma-1) M^2}{\text{Re}} \bar{\mu} \bar{S}^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\bar{p} = \bar{\rho} \bar{T} \frac{1}{\bar{m}}, \quad \bar{m}^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{c_j}{\bar{m}_j}, \quad (2.6)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_i = - \bar{\rho} c_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} \bar{D}_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(c_j \frac{\bar{m}}{\bar{m}_j} \right) + c_j \left(\frac{\bar{m}}{\bar{m}_j} - 1 \right) \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} \right] + D_i^T \frac{\partial \ln \bar{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.7)$$

$$\bar{\mathbf{q}} = - \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_h} \bar{\mathbf{J}}_j \bar{h}_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \bar{p} \sum_{j=1}^{N_h} k_{Tj} \frac{\bar{\mathbf{J}}_j}{\bar{\rho} c_j}, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{is} = \bar{m}_i (\bar{v}_{is}'' - \bar{v}_{is}') k_s^+ \bar{\rho} \sum_{j=1}^{N_h} \bar{v}_{js}' \left[\prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{\bar{m}_j} \right)^{\bar{v}_{js}'} - \right. \\ \left. - \frac{K_s}{\bar{K}_{ps}} (\bar{p} \bar{m})^{\sum_{j=1}^{N_h} (\bar{v}_{js}'' - \bar{v}_{js}')} \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{\bar{m}_j} \right)^{\bar{v}_{js}''} \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В систему уравнений (2.2) — (2.9) вошли следующие числа подобия:

$$\text{Sh} = \frac{l^0}{u^0 t^0} — \text{число Струхала}, \quad (2.10)$$

$$M = \frac{u^0}{(\gamma R T^0 / m^0)^{1/2}} — \text{число Маха}, \quad (2.11)$$

$$\gamma = \frac{c_p^0}{c_v^0} — \text{показатель адиабаты}, \quad (2.12)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho^0 u^0 l^0}{\mu^0} \text{ — число Рейнольдса,} \quad (2.13)$$

$$\text{Fr} = \frac{(u^0)^2}{g l^0 \varepsilon_\rho} \text{ — число Фруда *)}, \quad (2.14)$$

$$\text{Pr} = \frac{c_p^0 \mu^0}{\lambda^0} \text{ — число Прандтля,} \quad (2.15)$$

$$\text{Sc} = \frac{\mu^0}{\rho^0 D^0} \text{ — число Шмидта,} \quad (2.16)$$

$$\text{Da}_s = \frac{l^0}{u^0} \left[(\rho^0 / m^0)^{1 - \sum_{j=1}^{N_k} v'_{js}} \left(k_s^+ \right)^0 \right]^{-1} \text{ — число Дамкёлера } s\text{-й реакции,} \quad (2.17)$$

$$K_s = (p^0)^{\sum_{j=1}^{N_k} (v''_{js} - v'_{js})} / K_{ps}^0 \text{ — параметр равновесности } s\text{-й реакции,} \quad (2.18)$$

$$\bar{m}_j = m_j / m^0 \text{ — безразмерный молекулярный вес}$$

$$j\text{-й компоненты смеси,} \quad (2.19)$$

характеризующие роль различных эффе́ктов, определяющих течение многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси.

При решении конкретных задач динамики вязких газовых смесей в число критериев подобия могут входить не все из перечисленных выше безразмерных параметров. С другой стороны, при более детальной формулировке задачи, в частности, при конкретизации зависимостей, с помощью которых определяются теплофизические, переносные и кинетические параметры рассматриваемой газовой смеси, в соответствующих безразмерных соотношениях появляются дополнительные числа подобия, количество которых зависит как от количества компонент в смеси, так и от используемого способа определения тех или иных ее параметров. Например, если для определения констант скоростей химических реакций используются стандартные «аррениусовские» зависимости, то в выражении для $\bar{k}_s^+(\bar{T})$ появляется безразмерный комплекс $E_s / (RT^0)$ (E_s — энергия активации s -й химической реакции), величина которого характеризует чувствительность скорости реакции к изменению температуры. Наконец, ряд дополнительных чисел подобия связан

*) В литературе (см., например, [13]) число Фруда обычно вводится в несколько иной форме (не включает параметра $\varepsilon_\rho = \Delta\rho^0/\rho^0$, характеризующего степень неоднородности поля плотности в потоке). Однако с учетом того, что характерная скорость движения газа под действием архимедовой силы равна нулю в потоке с однородным полем плотности, т. е. при $\varepsilon_\rho = 0$, определение числа Фруда (2.14) представляется более естественным.

с формулировкой граничных условий к системе уравнений (2.2) — (2.9).

5.2. Граничные условия. Типичная для внутренних задач газовой динамики конфигурация расчетной области Ω , т. е. области, внутри которой требуется определить скорость и термодинамические параметры потока, схематически изображена на рис. 2.1. Она задается безразмерным уравнением поверхности σ , ограничивающей рассматриваемую область

$$\sigma(\bar{r}) = 0, \quad (2.20)$$

которое включает в качестве параметров те или иные безразмерные комплексы линейных размеров, являющиеся геометрическими параметрами подобия исследуемого класса течений.

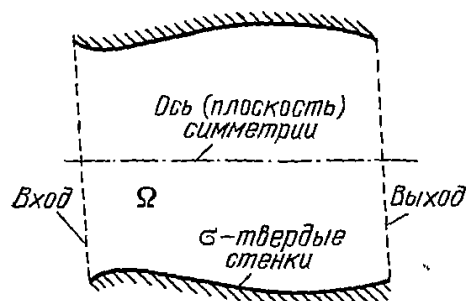


Рис. 2.1. Типы границ внутренних течений

Для окончательной формулировки математической модели течения многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси на основе полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9) необходимо поставить к этой системе начальные и граничные условия, т. е. задать поля искомых функций внутри расчетной области Ω в некоторый начальный момент времени

$\bar{t} = 0$ и значения вектора скорости и $(N_k + 1)$ -го параметра состояния или их производных (в общем случае каких-либо алгебраических комбинаций этих величин) на поверхности σ , а также значение одного из параметров состояния (обычно давления) в некоторой точке σ .

Задание начальных условий не вызывает особых затруднений, так как обычно они непосредственно вытекают из физической формулировки рассматриваемой задачи. В общем случае начальные условия могут быть записаны в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, 0) = \Phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega, \quad (2.21)$$

где Φ означает вектор скорости (или его компоненты) и $N_k + 2$ независимых термодинамических параметров состояния потока ($(N_k + 3)$ -й параметр состояния может быть найден по заданным $N_k + 2$ из уравнения состояния (2.6)). Что касается граничных условий к системе уравнений (2.2) — (2.9), то, как уже отмечалось, их корректная формулировка для внутренних задач динамики вязких газовых смесей является чрезвычайно сложной проблемой, требующей более подробного рассмотрения.

Как видно из рис. 2.1, основными типами границ внутренних течений являются: твердые стенки, ось или плоскость симметрии, «входное» и «выходное» сечения потока (так называемые проницаемые границы).

5.2.1. Условия на твердых стенках. Твердые стенки являются реальными физическими границами потока. Поэтому граничные условия на них могут быть сформулированы только на основе анализа процессов межфазного взаимодействия многокомпонентной газовой смеси с материалом поверхности. Этой проблеме посвящено большое число специальных исследований (см., например, работы [34—36]), в которых показано, в частности, что для рассматриваемых в настоящей книге течений вязких газовых смесей в режиме сплошной среды [13] граничные условия к системе уравнений (2.2)—(2.9) на твердых проницаемых (при наличии пористого вдува, отсоса) стенках, материал которых не вступает в химические реакции с газовым потоком, представляют собой макроскопические условия отсутствия динамического и теплового скольжения газа на стенке и условия материального и теплового баланса на поверхности раздела газ — твердое тело. С использованием введенных ранее масштабов эти условия могут быть записаны в следующей безразмерной форме:

$$\bar{v}_\tau = 0, \quad (2.22.1)$$

$$\bar{v}_n = \bar{m}_f / \bar{\rho}_w, \quad (2.22.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{T} = \bar{T}_w \text{ или } -\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_k} \bar{J}_{jn} \bar{h}_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_k} k_{Tj} \frac{\bar{J}_{jn}}{\bar{\rho} c_j} + \\ + \text{Re Pr } \bar{m}_f \sum_{j=1}^{N_k} [c_j \bar{h}_j - (c_j \bar{h}_j)_-] = \bar{q}_w, \end{aligned} \quad (2.22.3)$$

$$\bar{J}_{in} + \text{Re Sc } \bar{m}_f [c_i - (c_i)_-] = \sum_{s=1}^{N_{Rw}} \text{Da}_{sw} \bar{g}_{is} \quad (2.22.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N_k).$$

Здесь $\bar{m}_f$ — безразмерная (отнесенная к величине $\rho^0 u^0$) интенсивность вдува или отсоса смеси через пористую стенку, $\bar{T}_w$ — безразмерная (отнесенная к T^0) температура стенки, а $\bar{q}_w$ — безразмерный (отнесенный к величине $\lambda^0 T^0 / l^0$) тепловой поток на стенке. Все эти величины предполагаются заданными функциями времени и координат *).

Величина $\bar{g}_{is}$, входящая в условие баланса массы i -й компоненты смеси на стенке (2.22.4), представляет собой безразмерную массовую скорость образования (исчезновения) i -й компоненты смеси на единице поверхности стенки в результате протекания s -й гетерогенной химической реакции. В общем случае $\bar{g}_{is}$ является известной функцией давления, температуры и состава смеси на

*) Иногда функции $\bar{m}_f$, $\bar{T}_w$ и $\bar{q}_w$ не могут быть заданы априори. В этих случаях для описания течения необходимо использовать так называемую сопряженную постановку задачи (см., например, [37]).

стенке. Диффузионное число Дамкёлера Da_{sw} выражает отношение характерного времени диффузии $(l^0)^2/D^0 = t_{\text{диф}}^0$ и характерного времени протекания s -й реакции $\rho^0 l^0/g_s^0 = t_{\text{хим.в.}}^0$, т. е.

$$Da_{sw} = \frac{(l^0)^2/D^0}{\rho^0 l^0/g_s^0} = \frac{g_s^0 l^0}{\rho^0 D^0}, \quad (2.23)$$

где g_s^0 — характерная скорость протекания s -й каталитической реакции на стенке.

Индексы τ и n в (2.22.1) — (2.22.4) относятся соответственно к тангенциальной и нормальной к твердым стенкам составляющих векторов скорости и диффузионных потоков компонентов, а нижний индекс «—» — к параметрам смеси внутри пористой стенки.

5.2.2. Условия на оси (плоскости) симметрии. Эти условия основаны на допущении о том, что если расчетная область имеет ось или плоскость симметрии (см. рис. 2.1) и, кроме того, начальные условия (2.21), граничные условия на твердых стенках (2.22) и на входе и выходе (см. п. 5.2.3) также симметричны относительно этой оси (плоскости), то и искомое решение обладает аналогичным свойством, т. е. на оси (плоскости) симметрии выполняются условия

$$\bar{v}_n = 0, \quad (2.24.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n} = 0, \quad (2.24.2)$$

где $\bar{\Phi}$ — любая из остальных искомых функций, а n — направление нормали к оси (плоскости) симметрии.

Применение условий (2.24.1) — (2.24.2) позволяет существенно сократить размеры расчетной области, что является весьма важным на стадии численного решения системы уравнений (2.2) — (2.9) ввиду ограниченности ресурсов (объема памяти и быстродействия) ЭВМ. Однако следует иметь в виду и то обстоятельство, что если при анализе стационарных течений использование условий (2.24) при выполнении перечисленных выше требований является вполне естественным и строго обоснованным, то при моделировании нестационарных процессов их применение может существенно сужать класс возможных решений. Поэтому в общем случае при использовании условий (2.24) следует проявлять определенную осмотрительность, в частности, полезно проводить специальные численные эксперименты, направленные на выяснение их физической обоснованности в рассматриваемых конкретных условиях.

5.2.3. Условия на «входе» и «выходе». «Входная» и «выходная» границы расчетной области (см. рис. 2.1), так же как и ось (плоскость) симметрии, не являются реальными физическими границами потока. Однако если на оси (плоскости) симметрии характер поведения искомых функций в большинстве случаев ясен из соображений симметрии, то о свойствах потока на проницаемых границах расчетной области, как правило, трудно сказать что-либо опре-

деленное. Типичными примерами границ такого типа для внутренних течений являются входное и выходное сечения различных технических устройств (трубчатых теплообменников, камер сгорания, химических реакторов, сверхзвуковых сопел, диффузоров и т. п.). Однако в действительности газ или газовая смесь подаются в рассматриваемое устройство из какого-либо резервуара или из окружающей среды с помощью различных механических систем (насосов, трубо-насосных агрегатов), а на выходе из него попадают в другой резервуар или свободно истекают в окружающее пространство. Таким образом, исходя из физической постановки большинства внутренних задач газовой динамики, при их решении необходимо рассматривать течения в неограниченных или полуограниченных областях чрезвычайно сложной геометрии. С другой стороны, на практике основной интерес представляют, как правило, параметры течения собственно в рассматриваемом устройстве, а не предыстория потока или его параметры вниз по течению от этого устройства. Вследствие этого, а также в силу ограниченности памяти и быстродействия ЭВМ крайне важно, чтобы расчетная область, на границах которой должны быть сформулированы соответствующие граничные условия, как можно меньше выходила за пределы физической области, параметры потока в которой подлежат определению в рассматриваемой задаче.

Из сказанного следует, что понятия «входной» и «выходной» границ расчетной области при численном моделировании внутренних течений являются весьма условными, и на этих границах, так же как и во внутренних точках области, должны, вообще говоря, выполняться дифференциальные уравнения, используемые для описания течения во «внутренних» точках области.

При численном моделировании внешнего обтекания газовым потоком тела произвольной формы на основе системы уравнений Навье — Стокса, на первый взгляд, возникает аналогичная ситуация, однако эта аналогия является далеко не полной. Действительно, в этом случае наряду с граничными условиями на поверхности тела необходимо задать условия в невозмущенном потоке, т. е. параметры потока на бесконечности. Однако на практике по причинам, указанным выше, «внешняя» (проницаемая) граница расчетной области располагается на некотором конечном расстоянии от обтекаемого тела (исключение составляют лишь те случаи, когда при решении задачи используются преобразования координат, переводящие неограниченную область в ограниченную (см., например, [31, 38])). Таким образом, и в этом случае внешняя (проницаемая) граница расчетной области является весьма условной. Однако на этом сходство внешних и внутренних течений заканчивается, поскольку в первом случае значения параметров потока на проницаемых границах расчетной области известны (это не что иное, как параметры невозмущенного потока), и вопрос состоит лишь в том, на каком минимальном расстоянии от тела следует располо-

жить эти границы, чтобы не внести существенных погрешностей в результаты расчетов параметров потока вблизи обтекаемой поверхности. В случае же внутренних течений все параметры потока на проницаемых границах или по крайней мере некоторые из них, как правило, неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи. Ярким примером внутренних задач такого типа может служить прямая задача теории сопла Лавалья, при решении которой неизвестным является даже значение массового расхода газа через сопло. Это влечет за собой необходимость использования на проницаемых границах внутренних течений тех или иных искусственных условий, не вытекающих из физической постановки задачи и получивших в связи с этим название вычислительных граничных условий.

Важным аспектом проблемы вычислительных граничных условий является то обстоятельство, что далеко не любой набор физически приемлемых граничных условий является корректным в математическом отношении. При проведении расчетов это проявляется, как правило, в неустойчивости или отсутствии итерационной сходимости используемых численных алгоритмов. К сожалению, достаточно строгий анализ корректности постановки начально-краевых задач газовой динамики выполнен в настоящее время лишь для уравнений Эйлера динамики однородного невязкого газа (см., например, [39]). Однако и в этом относительно простом случае он является далеко не исчерпывающим. Правомерность использования выводов [39] и ряда других аналогичных работ [40—44] при численном моделировании течений однородного вязкого газа и, тем более, многокомпонентных газовых смесей на основе полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9) является далеко не очевидной, поскольку, наряду с гиперболическими свойствами этой системы, в окрестности проницаемых границ могут существенно проявляться присущие ей эллиптические и параболические свойства [45—47].

Таким образом, общая формулировка граничных условий к полной системе уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9) на входной и выходной границах внутренних течений многокомпонентных газовых смесей в настоящее время не представляется возможной. В связи с этим при численном моделировании таких течений для отыскания удовлетворительного набора граничных условий в подавляющем большинстве случаев используются прямые численные эксперименты, при проведении которых явно или неявно исходят из следующих двух принципов, сформулированных в уже упоминавшейся монографии Роуча [32]:

1. Для соответствия всего численного решения результатам эксперимента необходимо, чтобы имело место соответствие граничных условий во входном сечении потока.
2. Граничные условия на выходной границе должны предоставлять потоку на этой границе максимально допустимую свободу и

в то же время обеспечивать получение искомого решения задачи. Поскольку из этих принципов вытекают лишь самые общие рекомендации относительно путей поиска приемлемых граничных условий на входной и выходной границах расчетной области, численное решение каждой новой задачи, связанной с расчетом внутренних течений на основе системы уравнений Навье — Стокса, сопряжено, вообще говоря, с проведением большого объема трудоемких численных экспериментов с различными типами граничных условий и дополнительных конечно-разностных соотношений для определения некоторых параметров потока на границах («граничных аппроксимаций», по терминологии Блоттнера [48]), необходимость введения которых обусловлена конкретными особенностями используемых конечно-разностных схем. Трактовка результатов таких экспериментов зачастую бывает весьма неоднозначна, поскольку как тип граничных условий и аппроксимаций, так и их вычислительная эффективность существенным образом зависят от используемого метода численного интегрирования системы уравнений Навье — Стокса, в частности, от применяемых конечно-разностных схем и от структуры используемых пространственно-временных сеток [47, 49].

Не имея возможности подробно остановиться на анализе теоретических предпосылок, используемых при построении вычислительных моделей проницаемых границ (интересующимся этой проблемой можно рекомендовать работы [39—59]), рассмотрим коротко лишь те из этих моделей, применение которых, судя по приведенным в литературе данным, обеспечило возможность успешного решения задач о расчете внутренних течений того или иного типа.

В тех случаях, когда течение в окрестности проницаемых границ является локально сверхзвуковым ($|u| > a$, u — проекция вектора скорости на местную нормаль к границе, a — локальная скорость звука), задание корректных с математической точки зрения вычислительных граничных условий на этих границах не вызывает особых затруднений. На входной сверхзвуковой границе могут быть заданы значения всех основных параметров течения (всего в случае многокомпонентных смесей $N = L + (N_h + 2)$ граничных условий первого рода для L проекций вектора скорости (L — число пространственных измерений задачи) и $N_h + 2$ термодинамических параметров состояния смеси). На выходной сверхзвуковой границе могут использоваться различные типы граничных аппроксимаций, т. е. те или иные формы «экстраполяции» всех N основных искомых функций из внутренних точек области на границы (например, линейная экстраполяция основных переменных или некоторых их комбинаций [60—62], определение граничных значений искомых функций из разностных аналогов исходных дифференциальных уравнений, записанных с использованием несимметричных аппроксимаций пространственных производных [45] или из условий совме-

стности на характеристиках, приходящих из внутренних точек области на границу [58] *).

В случае дозвуковых проницаемых границ внутренних течений имеющиеся в литературе данные об удовлетворительных с вычислительной точки зрения способах задания граничных условий и аппроксимаций весьма разнородны и нередко оказываются противоречащими друг другу (см., например, работы Клайна [63, 64], Моретти [65] и Моретти, Пандолфи [59]).

Не вполне ясен даже вопрос о необходимом количестве задаваемых граничных условий [45, 47, 51].

В большинстве работ используется следующий подход, не имеющий достаточно строгого теоретического обоснования. На дозвуковых проницаемых границах для уравнений Навье — Стокса задается такое же количество независимых алгебраических связей между значениями основных параметров потока на этих границах, как и при описании рассматриваемого течения в рамках уравнений динамики невязкого газа: на входной границе задается $N - 1$ таких связей, а на выходной — одна [39, 53, 66]. Недостающие для уравнений Навье — Стокса граничные условия (одно — на входной границе и $N - 2$ — на выходной [51]) заменяются обычно различными граничными аппроксимациями, аналогичными указанным выше граничным аппроксимациям для сверхзвуковых проницаемых границ.

Кроме того, учитывая условный характер проницаемых границ, при выборе формы соответствующих граничных условий и аппроксимаций в случае дозвуковых внутренних течений, наряду с корректностью математической постановки задачи, крайне важно обеспечить отсутствие отражений от этих границ акустических возмущений, распространяющихся из внутренних точек области [67]. При решении нестационарных задач наличие волн, отраженных от проницаемых границ, приводит к искажению физической картины рассматриваемого течения. При расчете стационарных течений методом установления такие волны хотя и не сказываются на стационарном решении, однако могут чрезвычайно сильно замедлить сходимость итерационного процесса (см., например, [41, 54, 55, 58]).

Проблема построения «неотражающих» граничных условий достаточно полно разработана для внешних дозвуковых течений [41, 42, 67], когда поток в окрестности проницаемых границ является невязким и, кроме того, известен асимптотический характер поведения решения на бесконечности. Для внутренних течений ситуа-

*) При построении указанных характеристик нестационарные уравнения Навье — Стокса в окрестности проницаемых границ трактуются как локально гиперболическая квазиодномерная нестационарная система уравнений в переменных (x, t) , где x — местная нормаль к границе. Вязкие члены исходных уравнений и члены, содержащие пространственные производные по другим координатам, рассматриваются при этом как источники (см., например, [45, 58]).

ция в этом смысле является гораздо более сложной, однако, как показали Бэйлисс и Туркел [41], использование неотражающих условий, разработанных для внешних потоков, и в этом случае может дать определенный положительный эффект. Некоторые формы неотражающих условий на дозвуковых проницаемых границах для вязких течений предлагают также А. Т. Федорченко [47, 56, 57], Клайн, Уилмут [58] и Руди, Стрикверда [54].

Приведем некоторые конкретные наборы граничных условий и аппроксимаций на дозвуковых входных и выходных границах, использовавшиеся при решении внутренних задач динамики вязкого газа на основе полной системы уравнений Навье — Стокса.

Одним из наиболее распространенных способов постановки условий на входной дозвуковой границе является задание профиля плотности ρ и профилей нормальной v_n и тангенциальной v_τ составляющих вектора скорости*). Тем самым фиксируется расход газа через входное сечение. При этом в качестве граничных аппроксимаций, служащих для определения значений температуры или давления на входной границе, используются либо экстраполяция давления [68] или температуры [55], либо условия совместности на характеристиках, приходящих на границу из внутренних точек области [58, 63, 69]. Клайн и Уилмут [58], кроме того, предлагают использовать специальную процедуру сглаживания во времени значений давления на границе, обеспечивающую эффективное «гашение» отражений акустических возмущений.

В тех случаях, когда суммарный расход газа является неизвестным (подлежит определению в процессе решения задачи), в качестве граничных условий на входе обычно задаются значения температуры и давления торможения, а также тангенс угла наклона вектора скорости $\operatorname{tg} \theta = v_n/v_\tau$. В качестве граничных аппроксимаций в этом случае используются: несимметричная аппроксимация уравнения неразрывности (2.2) [45, 70, 71]; экстраполяция давления [72, 73] или плотности [74] из внутренних точек области; условия совместности на характеристиках [58, 75].

Несколько иные наборы вычислительных граничных условий на входной дозвуковой границе успешно используются в работах Л. В. Кузнецовой и Б. М. Павлова [61], Ле Баллера с соавторами [76], А. В. Белошицкого и Е. Н. Бондарева [77], Т. Д. Асланова, А. П. Быркина и В. В. Щенникова [78], О. М. Белоцерковского и др. [79], посвященных численному моделированию стационарных двумерных течений вязкого газа в соплах Лаваля и в каналах постоянного сечения под действием заданного перепада давления.

Что касается граничных условий на выходных дозвуковых границах, то практически во всех работах в качестве таковых задается

*) Корректность такого набора граничных условий для уравнений Эйлера показана в работе Олигера и Сандстрема [39].

значение статического давления $p_{\text{вых}}$ *). Искключение в этом смысле составляют работы Т. Д. Асланова, А. П. Быркина и В. В. Щенникова [78] (задается значение статического давления только в одной точке выходного сечения — на стенке канала) и Томаса [45], который в случае сверхзвукового истечения газа из сопла Лавала предлагает использовать на границе несимметричную аппроксимацию исходных уравнений не только в сверхзвуковой области потока, но и в дозвуковой части пограничного слоя на стенке сопла **). Для определения остальных параметров потока, как и на выходной сверхзвуковой границе, используются различные типы граничных аппроксимаций.

Ряд моделей проницаемых границ, эффективных с точки зрения гашения продольных акустических колебаний при расчете течений вязкого газа в каналах и соплах Лавала, предложен в работах А. Т. Федорченко [47, 56]. Характерной особенностью этих моделей является задание переменного во времени расхода через входное сечение канала.

В заключение отметим, что практически все упомянутые выше работы посвящены расчету течений однородного вязкого газа. Особенности постановки граничных условий на проницаемых границах внутренних течений химически реагирующих газовых смесей в литературе до настоящего времени не рассматривались.

5.3. О конечно-разностных методах численного интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса. Численное интегрирование полной системы уравнений Навье — Стокса представляет собой чрезвычайно сложную и трудоемкую задачу, решение которой находится на пределе возможностей современных ЭВМ даже в случае расчета течений однородного вязкого газа. Именно поэтому система уравнений Навье — Стокса стала, по образному выражению В. М. Ковени и Н. Н. Яненко [31], «полигоном», на котором проходят испытания многие современные численные методы решения задач математической физики.

В случае расчета внутренних течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей эта задача еще более усложняется, что связано как со значительным увеличением объема вычислений, так и с возникновением целого ряда серьезных дополнительных трудностей принципиального характера.

*) При решении стационарных задач методом установления более эффективной (см., например, [58]) может оказаться «релаксационная» форма этого условия: $\partial p / \partial t - \rho c \partial u / \partial t + \alpha(p - p_{\text{вых}}) = 0$; $\alpha = \text{const} > 0$, предложенная в работе Руди и Стрикверды [54].

**) С точки зрения квазиодномерного нестационарного метода характеристик такие условия на дозвуковой выходной границе являются некорректными [39]. По мнению Томаса [45], их использование в данном случае оказывается возможным вследствие преобладания параболических свойств уравнений Навье — Стокса в пограничном слое.

Ниже проводится краткий обзор существующих конечно-разностных методов расчета течений рассматриваемого класса, анализ основных тенденций их развития и путей преодоления имеющихся трудностей.

5.3.1. Общая характеристика методов. В настоящее время для большинства типов химически реагирующих внутренних течений уже имеются примеры расчетов на основе полной системы уравнений Навье — Стокса. Используемые при этом конечно-разностные методы можно разделить на несколько основных групп.

1. *Полностью явные конечно-разностные схемы.* Наиболее популярными среди схем этого типа являются различные варианты явной схемы Мак-Кормака [80, 81]. Они, в частности, применяются в работах, посвященных численному моделированию процессов в гиперзвуковых прямоточных воздушно-реактивных двигателях [73, 82, 83], а также в резонаторах газодинамических и химических лазеров непрерывного действия [84—86].

Основными достоинствами явных конечно-разностных схем являются их простота и наглядность, отсутствие трудностей при реализации сложных граничных условий, часто встречающихся при расчете внутренних течений реагирующих смесей (см. п. 5.2), а также легкость приспособления соответствующих алгоритмов для ЭВМ с векторными процессорами [67].

Вместе с тем, как известно [31, 32], при использовании явных конечно-разностных схем на значение шага интегрирования по времени τ из соображений устойчивости накладывается ряд ограничений вида

$$\tau \leq \tau_{\text{акуст}} = O\left(\frac{h}{u + a}\right), \quad (2.25)$$

$$\tau \leq \tau_{\text{диф}} = O(\text{Re} \cdot h^2), \quad (2.26)$$

$$\tau \leq (\tau_{\text{хим}})_{\min} = O\left[\min_s \tau_{\text{хим}}^{(s)}\right], \quad (2.27)$$

где h — пространственный шаг конечно-разностной сетки, u — скорость потока, a — скорость звука, $\tau_{\text{хим}}^{(s)}$ — характерное время протекания s -й химической реакции. Необходимость выполнения этих условий значительно снижает эффективность явных конечно-разностных схем, особенно при расчете стационарных течений методом установления во времени, когда на временной шаг τ (в данном случае — итерационный параметр) не накладывается никаких ограничений с точки зрения точности аппроксимации исходных дифференциальных уравнений. Кроме того, ограничения на τ , диктуемые условиями (2.25) — (2.27), часто являются неоправданно сильными даже при решении нестационарных задач [31, 87—89]. В частности, условие устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви (КФЛ) (2.25) становится особенно жестким при расчете дозвуковых течений, диффузионное условие устойчивости (2.26) — при расчете

течений с умеренными и низкими значениями чисел Рейнольдса (т. е. именно в тех случаях, когда возникает необходимость в описании течения на основе полной системы уравнений Навье — Стокса), а условие (3.27) — при расчете течений с быстропротекающими (околоравновесными) процессами.

В результате для большинства типов внутренних течений реагирующих смесей хотя бы одно из ограничений (2.25) — (2.27) оказывается настолько сильным, что, по существу, исключает возможность проведения на основе явных конечно-разностных схем численных исследований сколько-нибудь значительного объема. Именно этим обстоятельством объясняется тот факт, что практически во всех перечисленных выше работах рассмотрение ограничивается единичными, в большинстве случаев — модельными примерами расчета, имеющими чисто иллюстративный характер. Поэтому перспективы совершенствования численных методов расчета внутренних течений реагирующих газовых смесей на основе полной системы уравнений Навье — Стокса связаны с развитием неявных конечно-разностных схем, применение которых дает возможность существенно ослабить или полностью исключить ограничения (2.25) — (2.27) на величину τ .

2. *Частично неявные условно устойчивые разностные схемы.* При численном интегрировании уравнений Навье — Стокса для внутренних химически реагирующих течений среди методов данного типа наибольшее распространение нашел подход, в основе которого лежит так называемый ICE-метод Харлоу и Амсдена [90]. В рамках этого метода используется частично неявная аппроксимация уравнения неразрывности (2.2) и членов с градиентом давления в уравнении движения (2.3). При этом расчет поля давления осуществляется с помощью итерационной процедуры решения линейного эллиптического разностного уравнения (типа уравнения Пуассона), которое получается из соответствующих разностных аналогов уравнений неразрывности и движения с учетом сжимаемости газа (зависимости его плотности от давления). В результате удается исключить скорость звука из условия устойчивости КФЛ (2.25), которое для ICE-метода принимает такой же вид, как и для явных методов расчета течений несжимаемой жидкости

$$\tau \leq O(h/u). \quad (2.28)$$

Тем самым открывается возможность для более эффективного расчета течений с произвольными, в том числе и малыми, числами Маха, что, как уже отмечалось, особенно важно при моделировании внутренних течений.

Обобщение ICE-метода на случай течений многокомпонентных смесей впервые было предложено Ривардом с соавторами [91] и в дальнейшем с успехом использовалось при анализе процессов в лазерных системах непрерывного действия [92—95], а также при ис-

следовании сложных явлений, сопровождающих горение с интенсивным тепловыделением в сверхзвуковых потоках [96—98].

Важной чертой алгоритма [91], построенного на основе принципа расщепления конечно-разностных операторов по физическим процессам [99] и названного авторами RICE (Reacting ICE), является частично неявная аппроксимация химических источников членов $\dot{w}_{is}$ в уравнениях переноса массы отдельных компонентов смеси (2.4), что позволяет несколько ослабить ограничение (2.27) на временной шаг τ . Кроме того, в RICE при определении поля давления используется итерационная процедура расчета давления [100], модифицированная на случай сжимаемого течения (применение этой процедуры, по существу, эквивалентно решению эллиптического уравнения для давления, используемого в ICE-методе, но позволяет несколько упростить реализацию граничных условий). Тем не менее проведению в рамках этого метода расчетов с большими значениями τ по-прежнему препятствует наличие ограничений (2.26), (2.27), а также то обстоятельство, что используемый в RICE способ расщепления по физическим процессам приводит к разностной схеме «неполной аппроксимации» [99], т. е. в получаемое стационарное решение задачи вносится погрешность, зависящая от шага по времени.

В работе [101] предложено обобщение ICE-метода на случай использования конечно-разностных сеток, состоящих из произвольных четырехугольников, положение угловых точек которых может быть функцией времени, что позволяет рассчитывать течения с криволинейными и подвижными границами. Соответствующая модификация RICE-метода с успехом применялась для анализа нестационарных процессов в двигателях внутреннего сгорания и решения ряда других задач [102—104].

Различные усовершенствования, направленные на повышение эффективности конечно-разностных схем, построенных на основе ICE-метода, были также предложены в работах Вестбрука [105] (с целью повышения точности аппроксимации по времени при расчете нестационарных течений с интенсивным тепловыделением в результате экзотермических реакций), Клаутмана с соавторами [106] (с целью увеличения скорости сходимости итерационной процедуры определения давления в потоках с быстроизменяющимся средним уровнем давления), Н. Н. Яненко, В. И. Головичева [98] (с целью улучшения процедуры расчета диффузионных процессов в многокомпонентных смесях с существенно различающимися диффузионными свойствами компонентов).

3. *Методы, основанные на использовании полунеявной процедуры совместного расчета полей скорости и давления SIMPLE* [107]. Методы этого типа, детальное описание которых содержится в монографии Патанкара [108], занимают особое место среди численных методов расчета внутренних течений на основе полной системы уравнений Навье — Стокса.

В отличие от большинства алгоритмов численного интегрирования уравнений Навье — Стокса, в рамках данного подхода решение стационарных задач осуществляется не методом установления во времени, а на основе глобальной итерационной процедуры, каждый шаг которой включает решение эллиптического уравнения для поправки давления p' и решение неявных разностных аналогов исходных уравнений переноса. Вторая особенность метода SIMPLE заключается в том, что при получении уравнения для p' , представляющего собой комбинацию уравнений неразрывности (2.2) и движения (2.5), в стандартном варианте этого метода не учитывается сжимаемость газовой смеси (в уравнении для p' используется поле плотности, полученное на предыдущей итерации). В случае, если при этом удастся добиться сходимости итерационной процедуры, данное обстоятельство не играет роли, так как оно не может сказаться на сошедшемся численном решении. Однако при расчете течений, в которых заметно проявляются эффекты сжимаемости, возникает высокая вероятность расходимости описанного итерационного процесса [108], так что в этом случае стандартная версия алгоритма SIMPLE становится, по существу, неработоспособной.

На первый взгляд алгоритм SIMPLE может показаться аналогичным рассмотренному выше ICE-методу (в обоих методах поле p определяется с помощью линейного разностного эллиптического уравнения типа уравнения Пуассона). Однако между ними существует важное различие, заключающееся в том, что в ICE-методе при получении этого уравнения плотность в уравнении неразрывности аппроксимируется на новом $(n+1)$ -м временном слое (она выражается через оценку давления на $(n+1)$ -м слое $\tilde{p}$ с учетом сжимаемости: $\rho^{n+1} = \rho^n + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)^n (\tilde{p} - p^n)$), а скорость в конвективных и вязких членах уравнений движения — на «старом» (n -м) временном слое. В методе же SIMPLE, как уже отмечалось, при получении разностного уравнения относительно p' , наоборот, используется плотность с предыдущей, а скорость — с текущей итерации. Именно поэтому ICE-метод оказывается более эффективным при умеренных и высоких значениях числа Маха (при $M \ll 1$ существенно замедляется сходимость процедуры расчета $\tilde{p}$ [109, 110]), а алгоритм SIMPLE, наоборот, — при расчете существенно дозвуковых течений ($M \ll 1$).

К настоящему времени накоплен весьма обширный опыт использования данного алгоритма (см., например, работы [111—118]), свидетельствующий о его достаточно высокой экономичности при численном моделировании дозвуковых потоков газовых смесей. Вместе с тем существенным недостатком алгоритма SIMPLE является необходимость введения нижней релаксации как на стадии определения поля давления, так и в процессе расчета остальных переменных. При этом значения коэффициентов релаксации, обеспечивающие сходимость итерационной процедуры, могут сильно зави-

сеть от типа рассматриваемой задачи и оказываются различными для разных уравнений переноса [119, 120].

Для расширения возможностей алгоритма SIMPLE в работах [121—123] предложены различные его модификации, предназначенные для расчета существенно сжимаемых, в том числе и сверхзвуковых потоков. Однако в практике численного моделирования внутренних химически реагирующих течений эти модификации пока не применялись.

Описание возможностей ряда вычислительных программ, построенных на основе алгоритма SIMPLE, содержится в работах [124—128].

4. *Неявные разностные схемы, основанные на линеаризации конечно-разностных аналогов исходных дифференциальных уравнений относительно приращений искомых функций и последующей приближенной факторизации стабилизирующих конечно-разностных операторов.* Разработка схем данного типа, представляющих собой дальнейшее развитие классических неявных схем метода переменных направлений [129, 130] и метода дробных шагов [99], является одним из наиболее крупных достижений последних лет в области совершенствования методов численного интегрирования уравнений Навье — Стокса. Опыт применения указанных схем для расчета внутренних химически реагирующих течений пока еще не велик. Тем не менее полученные при их использовании результаты представляются весьма обнадеживающими. В частности, с помощью таких схем впервые удалось в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса изучить закономерности развития очагов горения в замкнутых объемах в условиях естественной конвекции [131—137], а также провести систематические численные исследования процессов, протекающих в резонаторах сверхзвуковых химических лазеров [138—142].

В связи с этим целесообразно более подробно остановиться на основных свойствах указанных разностных схем.

Конкретные формы неявных линеаризованных схем приближенной факторизации (НЛФ-схем) отличаются значительным разнообразием, которое обусловлено возможностью различных способов выбора основных переменных, относительно приращений которых производится линеаризация неявных разностных уравнений, а также разнообразием возможных путей приближенной факторизации (расщепления) конечно-разностных операторов. Изложение общего подхода к построению разностных схем данного типа и подробный анализ существующих алгоритмов содержится в монографии В. М. Ковени и Н. Н. Яненко [31].

Основные достоинства НЛФ схем, обусловившие их быстрое и широкое распространение в практике решения разнообразных внешних и внутренних задач динамики однородного вязкого газа, заключаются в следующем. Эти схемы являются безытерационными, высоко устойчивыми и пригодны для расчета течений в широ-

ком диапазоне изменения чисел Маха (трудности, возникающие при использовании этих схем для анализа существенно дозвуковых ($M \ll 1$) потоков и являющиеся общими практически для всех численных методов расчета таких потоков на основе полной системы уравнений Навье — Стокса, рассмотрены в п. 5.3.2). Весьма важно, что при этом НЛФ схемы, в отличие, например, от недавно предложенной неявной схемы [243], обладают свойством полной аппроксимации. Это позволяет в полной мере реализовать преимущество высокоустойчивых разностных схем, заключающееся в возможности использования произвольных значений шагов по времени τ при расчете стационарных течений методом установления. Следует, однако, иметь в виду, что использование больших значений τ не всегда обеспечивает наиболее высокую скорость сходимости НЛФ схем к стационарному решению. Значительно более выгодным может оказаться использование комбинаций малых и больших шагов по времени, обеспечивающих эффективное подавление соответственно коротковолновых и длинноволновых возмущений решения [68, 144].

Существующие НЛФ схемы можно разделить на две основные группы.

К первой из них относятся схемы, при построении которых применяется расщепление только по пространственным направлениям [145, 146] и др., позволяющее свести реализацию этих схем для многомерных уравнений к решению последовательности одномерных задач. При этом возникает необходимость решения систем линейных алгебраических уравнений относительно «невязок» искомых функций, имеющих блочную трехдиагональную структуру, причем размер блочных матриц совпадает, вообще говоря, с количеством основных неизвестных функций N . Решение таких систем осуществляется с помощью алгоритма векторной прогонки, требующего для своей реализации числа арифметических операций, пропорционального N^3 .

НЛФ схемы второго типа строятся на основе подхода, развитого в уже упоминавшихся работах В. М. Ковени, Н. Н. Яненко и их соавторов и заключающегося в применении, наряду с расщеплением по пространственным направлениям, дополнительного расщепления стабилизирующих конечно-разностных операторов по физическим процессам. Предложенные формы такого расщепления позволяют практически без снижения устойчивости численного метода получать экономичные разностные схемы, реализуемые при помощи скалярных прогонок и вычислений по явным формулам. Число необходимых при этом арифметических операций пропорционально N .

Указанное различие двух основных типов НЛФ схем приобретает особо важное значение при рассмотрении обобщений этих схем на случай расчета течений многокомпонентных реагирующих смесей.

Применение для этой цели НЛФ схем первой группы приводит к созданию высокоустойчивых численных методов с полностью неявной аппроксимацией источниковых членов исходных уравнений [147], однако при этом затраты машинного времени, необходимые для выполнения одного временного шага, резко увеличиваются с ростом числа компонент смеси N_k . В связи с этим применение таких схем оказывается целесообразным только при анализе смесей, содержащих умеренное число компонент. В частности, в опубликованных к настоящему времени работах, посвященных решению уравнений Навье — Стокса для неравновесных газовых смесей на основе НЛФ схем, реализуемых векторными прогонами, рассматриваются только двух- и трехкомпонентные смеси [131—137, 148, 71]. Очевидно, что наличие ограничений подобного рода существенно сужает круг задач, которые могут быть решены с помощью таких НЛФ схем.

Некоторое повышение экономичности этих схем при расчете течений с большим числом компонент может быть достигнуто за счет разбиения системы разностных уравнений переноса массы компонент (2.4) на несколько независимых подсистем меньшей размерности [68, 144]. Однако в общем случае достаточно разветвленных кинетических схем взаимодействия компонент выделение таких подсистем весьма затруднительно.

Применение НЛФ схем второго типа (реализуемых с помощью скалярных прогонок) может, вообще говоря, обеспечить существенный выигрыш в затратах машинного времени даже при расчете течений однопородного газа. В случае же многокомпонентных смесей использование лежащего в основе таких схем принципа расщепления не только по координатам, но и по физическим процессам, представляется тем более эффективным, так как позволяет в рамках единого подхода строить неявные высокоустойчивые разностные схемы для расчета течений с самыми разнообразными физико-химическими процессами путем введения в схему дополнительных дробных шагов с соответствующими этим процессам стабилизирующими разностными операторами [31]. При этом достаточно сложной задачей может оказаться выбор такой формы указанных операторов, которая позволяла бы сохранить экономичность алгоритма (возможность его реализации с помощью скалярных прогонок) без существенного снижения устойчивости схемы по сравнению с НЛФ схемами первого типа.

О возможности успешного решения этой задачи свидетельствуют, в частности, работы [62, 138—140], в которых на основе обобщения разностной схемы [149, 150] предложены экономичные высокоустойчивые методы численного интегрирования уравнений Навье — Стокса для сжимаемых течений многокомпонентных смесей при наличии химических реакций, неравновесного обмена энергией между внутренними степенями свободы молекул и вынужденного излучения. Эти методы подробно рассматриваются в гл. 6,

которая посвящена численному моделированию процессов, протекающих в резонаторах сверхзвуковых химических лазеров непрерывного действия.

К числу недостатков НЛФ схем следует отнести необходимость формулирования отсутствующих в физической постановке задачи условий на дробных шагах для вспомогательных величин — промежуточных значений невязок искомых функций [31]. Рациональная постановка таких условий, особенно в том случае, когда «физические» граничные условия или граничные аппроксимации (см. п. 5.2) имеют сложную структуру, является далеко не тривиальной задачей.

Вопросы реализации граничных условий для НЛФ схем рассматривались в целом ряде работ. В частности, в [69] предлагается использовать простейший способ, заключающийся в «занулении» граничных значений невязок основных переменных на дробных шагах и последующем (после выполнения «целого» шага по времени) пересчете значений искомых функций на границе области с учетом граничных условий. Однако применение данного (по существу, явного) способа аппроксимации граничных условий может приводить к сильному понижению устойчивости НЛФ схем [44, 49]. В связи с этим в ряде работ [31, 45, 79, 151] предлагается использовать другой путь реализации сложных граничных условий для НЛФ схем, состоящий в применении в граничных узлах сетки разностных схем расщепления, аналогичных схемам для внутренних точек области. Указанный путь построения граничных условий на дробных шагах достаточно хорошо зарекомендовал себя на практике, особенно при решении стационарных задач методом установления [31].

Еще один, по-видимому, несколько более строгий способ построения неявных аппроксимаций граничных условий на дробных шагах предложен в сравнительно недавно опубликованной работе [71]. Этот способ, однако, весьма сложен в реализации и пока еще не прошел достаточно широкой практической проверки.

Следует отметить, что трудности реализации граничных условий для НЛФ схем усугубляются при использовании многошаговых схем расщепления по физическим процессам, поскольку в этом случае условия на дробных шагах должны быть приведены к форме, которая не препятствовала бы возможности реализации схем с помощью скалярных прогонок.

Кроме того, указанные трудности увеличиваются при расчете течений многокомпонентных смесей, так как при этом обычно существенно усложняется форма записи физических граничных условий (см. п. 5.2).

Как уже отмечалось, преимущества НЛФ схем проявляются в основном при расчете стационарных течений методом установления, когда отсутствуют какие-либо физические ограничения на величину шага по времени. При численном интегрировании нестационар-

ных уравнений Навье — Стокса эффективность использования этих схем может значительно уменьшаться, что обусловлено ухудшением аппроксимации исходных уравнений по времени из-за линеаризации нелинейных членов и приближенной факторизации стабилизирующих операторов. Перспективный способ повышения точности НЛФ схем при решении нестационарных задач предложен в работах Г. М. Махвиладзе и С. Б. Щербака [89, 152] и С. Б. Щербака [153]. Этот способ заключается в том, что соответствующие НЛФ схемы формулируются не для приращений искомых функций на текущем временном шаге, а для их невязок по отношению к приближенным значениям этих функций на новом временном слое, полученным путем линейной экстраполяции по двум последним известным слоям. Данный прием оказался, в частности, весьма эффективным при расчете нестационарных дозвуковых течений и позволил, как уже упоминалось, впервые решить на основе полных уравнений Навье — Стокса ряд задач о нестационарном горении газовых смесей в условиях естественной конвекции. В дальнейшем на его основе были построены НЛФ схемы для расчета нестационарных течений с ударными волнами [154].

Недостатком описанного подхода является увеличение затрат памяти ЭВМ, обусловленное необходимостью хранения информации о параметрах потока на двух временных слоях.

5.3.2. Особенности методов расчета течений с малыми числами Маха. По-видимому, впервые на значительные вычислительные трудности интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса при существенно дозвуковых ($M \ll 1$) скоростях потока было указано в работе Г. Б. Петражицкого и В. И. Полежаева [155], посвященной исследованию естественно-конвективных течений в замкнутых объемах на основе неявной разностной схемы В. И. Полежаева [156]. В настоящее время причины появления указанных трудностей достаточно хорошо поняты [32, 88, 108, 110]. Они обусловлены двумя свойствами течений рассматриваемого типа.

Первое из них состоит в значительном различии двух характерных для существенно дозвуковых течений масштабов времени: характерного времени конвекции $\tau_{\text{конв}} = h/u$ и характерного времени распространения акустических возмущений $\tau_{\text{акуст}} = h/(u + a)$.

При использовании явных конечно-разностных схем в соответствии с условием устойчивости КФЛ (2.25) шаг интегрирования по времени τ не может превышать характерного времени наиболее быстрого процесса — процесса передачи акустических возмущений $\tau_{\text{акуст}}$. Вместе с тем при расчете основных параметров существенно дозвуковых потоков учет акустических процессов, как правило, не является необходимым. Вследствие этого отношение максимально допустимого условием устойчивости КФЛ временного шага к шагу интегрирования, обеспечивающему достаточную точность при решении нестационарных задач, $\tau_{\text{уст}}/\tau_{\text{точн}} = O(\tau_{\text{акуст}}/\tau_{\text{конв}}) = O[M/(M + 1)] \rightarrow 0$ при $M \rightarrow 0$. Именно поэтому, как уже отмечалось, при малых

значениях числа Маха применение для численного интегрирования уравнений Навье — Стокса явных конечно-разностных схем оказывается совершенно неоправданным. Исключение в этом смысле составляют лишь некоторые специфические задачи, связанные с анализом распространения волн горения [88], а также случаи, когда предметом изучения являются собственно акустические процессы (см., например, [157]). В таких случаях выполнение условия $\tau \ll \tau_{\text{акуст}}$ становится необходимым для достаточно точного описания этих процессов.

Трудности расчета существенно дозвуковых течений, обусловленные различием характерных времен $\tau_{\text{акуст}}$ и $\tau_{\text{конв}}$, не исчезают полностью (хотя и уменьшаются в значительной степени) при использовании рассмотренных в предыдущем разделе частично и полностью неявных конечно-разностных схем (типа ICE метода и НЛФ схем), для которых выполнения условия КФЛ (2.25) не требуется. Это связано с возникновением и распространением по сетке «паразитных» акустических волн, препятствующих итерационной сходимости решения *).

Так, в приведенном в работе [109] примере расчета нестационарного распространения пламени в закрытом сосуде с помощью метода RICE уменьшение квадрата характерного числа Маха от $9,4 \cdot 10^{-3}$ до $1,5 \cdot 10^{-5}$ привело к увеличению затрат машинного времени приблизительно втрое (как уже отмечалось, это обусловлено увеличением числа итераций, необходимых для сходимости процедуры расчета давления). Значительное ухудшение сходимости НЛФ схемы [146] при малых значениях числа Маха отмечают также авторы [158, 159].

Второе из упоминавшихся выше свойств существенно дозвуковых течений, приводящее к возникновению трудностей при их расчете в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса, состоит в том, что для этих течений характерны чрезвычайно малые относительные изменения давления. Вследствие этого расчет градиентов давления, определяющих динамику дозвуковых потоков, содержит операцию вычисления малых разностей близких между собой абсолютных значений давления, что приводит к ухудшению точности разностных схем [32, 108].

Данное обстоятельство становится очевидным, если учесть, что характерным для дозвуковых течений масштабом разности давлений в различных точках потока является величина $\rho^0 (u^0)^2$, а характерным масштабом давления — величина $p^0 = \rho^0 R T^0 / m^0 = \rho^0 (u^0)^2 / (\gamma M^2) \gg \rho^0 (u^0)^2$ при $M^2 \ll 1$. Поэтому для определения поля градиентов давления с заданной относительной погрешностью $\delta_{\text{grad } p}$ в

*) Из-за взаимодействия этих волн с границами расчетной области указанные эффекты нередко бывает сложно отделить от рассмотренных в п. 5.2.3 трудностей постановки корректных граничных условий на дозвуковых участках проницаемых границ внутренних течений.

рамках разностных схем, в которых эти градиенты вычисляются по полю давления p , необходимо последнее рассчитать с относительной погрешностью $\delta_p \sim \gamma M^2 \delta_{\text{grad } p}$. Ясно, что при проведении вычислений с конечным числом значащих цифр эта задача при достаточно малых значениях M становится неразрешимой.

Для повышения эффективности неявных разностных схем численного интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса при расчете существенно дозвуковых потоков предложено несколько приемов. Так, в работе [109] для этой цели предлагается использовать масштабирование размерных параметров задачи, равносильное, по существу, формальному увеличению в некоторое число $\alpha > 1$ раз числа Маха M в исходных уравнениях, записанных в безразмерной форме. В том случае, если обеспечено выполнение условия $M_{\text{нов}}^2 = \alpha^2 M^2 \ll 1$, решение полученных таким образом «новых» уравнений практически совпадает с решением исходной задачи, а трудности их численного интегрирования (например, с помощью алгоритма RICE), обусловленные малостью величины M , уменьшаются *).

В работе [158] предложен весьма перспективный путь улучшения итерационной сходимости при расчете стационарных дозвуковых течений на основе НЛФ схем типа схемы [146]. Он заключается в использовании при построении разностной схемы в качестве основной переменной не значения плотности (как в исходной схеме) [146], а значения коэффициента давления, пропорционального отклонению давления от некоторого постоянного уровня, характерного для рассматриваемого течения. Такой подход, отражающий специфический характер распределения давления в существенно дозвуковых потоках, исключает трудности расчета поля $\text{grad } p$. Кроме того, важным элементом метода [158] является применение специального искусственного приема, сводящегося, по существу, к подавлению акустических возмущений, возникающих в процессе расчетов. При этом, однако, нарушается аппроксимация исходных уравнений по времени, что исключает возможность использования этого приема при решении нестационарных задач.

Судя по опубликованным к настоящему времени работам, описанные выше трудности расчета существенно дозвуковых потоков в рамках полной системы уравнений Навье — Стокса удается обой-

*) Следует отметить, что границы применимости указанного приема не широки, а его вычислительная эффективность ниже, чем эффективность использования рассматриваемой в п. 6.2.2 модели существенно дозвуковых потоков многокомпонентных смесей, являющейся предельной формой полной системы уравнений Навье — Стокса при $M \rightarrow 0$. Применение этой модели, исключающей возможность распространения акустических возмущений уже на уровне дифференциальных уравнений, автоматически снимает все описанные выше трудности, связанные с численным интегрированием уравнений Навье — Стокса для существенно дозвуковых потоков, а также с постановкой корректных условий на произвольных границах области.

ти в случае использования релаксационных численных методов, основанных на алгоритме SIMPLE, что, по-видимому, обусловлено уже обсуждавшейся выше специальной структурой этого алгоритма, ориентированного именно на расчет течений с $M \ll 1$. Кроме того, как отмечается в [108], по крайней мере в части работ, посвященных численному моделированию дозвуковых потоков на основе алгоритма SIMPLE, плотность смеси определяется с помощью «урезанного» уравнения состояния вида $\rho = p^0 m / (RT)$, где p^0 — постоянный характерный для рассматриваемого течения уровень давления. По сути дела, это эквивалентно использованию предельной формы уравнений Навье — Стокса при $M \rightarrow 0$ (см. п. 6.2).

5.3.3. Особенности методов расчета неравновесных течений с быстропротекающими химическими реакциями. Принципиальные вычислительные трудности, возникающие при численном моделировании течений данного класса, связаны с жесткостью соответствующих систем дифференциальных уравнений (см. [88]), обусловленной тем, что характерные времена процессов конвективного и диффузионного переноса на много порядков превышают характерные времена протекания всех или некоторых химических реакций.

Для получения численного решения таких систем, описывающего детали всех рассматриваемых процессов, необходимо использовать чрезвычайно мелкий шаг интегрирования по времени τ , соответствующий характерному времени самого быстрого из них $(\tau_{\text{хим}})_{\min}$, что оказывается практически невозможным из-за ограниченности ресурсов современных ЭВМ. Тем не менее во многих случаях достаточная точность аппроксимации по времени может быть достигнута при значениях $\tau \gg (\tau_{\text{хим}})_{\min}$. Это связано с тем [110], что после короткого переходного процесса (его детали обычно не представляют интереса) наиболее быстро изменяющиеся параметры потока приходят в состояние локального равновесия, скорость изменения которого определяется уже характерными скоростями «медленных» процессов (конвекции, диффузии и «медленных» химических реакций). Тем более неоправданным является использование малых шагов интегрирования по времени при расчете стационарных течений методом установления, когда физические ограничения на величину τ отсутствуют.

С другой стороны, при попытке интегрирования жестких систем с шагом по времени, соответствующим характерным скоростям изменения основных параметров потока, что позволяет получить решение задачи при приемлемых затратах машинного времени, возникают, как известно, значительные трудности, связанные с потерей устойчивости разностных схем. Именно поэтому, как уже отмечалось, при численном моделировании течений с быстропротекающими процессами практически непригодными оказываются схемы с явной аппроксимацией химических источников членов $\dot{w}_i$ в (2.4), имеющие ограничение по устойчивости вида (2.27).

В связи с этим в практике численного моделирования течений неравновесных газовых смесей с быстропротекающими процессами в настоящее время используются частично или полностью неявные способы аппроксимации химических источников. Построенные на этом принципе конечно-разностные схемы можно разделить на три основные группы.

К первой из них относятся схемы, основанные на использовании расщепления по физическим процессам в форме, позволяющей выделить расчет химических процессов в отдельный «дробный шаг», реализация которого сводится к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) химической кинетики. При этом на «химическом» дробном шаге обычно применяются разработанные для решения жестких систем ОДУ эффективные высокоустойчивые неявные многошаговые методы типа широко известного метода Гира [160].

Недостатком данного подхода является то, что указанный способ расщепления приводит, как уже отмечалось, к построению разностных схем, не обладающих свойством полной аппроксимации. Кроме того, высокая эффективность неявных многошаговых методов интегрирования жестких систем ОДУ в значительной степени обусловлена возможностью использования информации о характере поведения решения на протяжении нескольких предыдущих шагов. При решении многомерных задач динамики многокомпонентных реагирующих смесей вследствие ограниченности памяти ЭВМ такая возможность отсутствует, в связи с чем эффективность указанных методов заметно снижается [88].

Вторая группа методов расчета течений с быстропротекающими химическими реакциями основана на полностью неявной аппроксимации нелинейных источников членов $\dot{w}_{is}$ и решении полученных таким образом систем нелинейных разностных уравнений с помощью итерационного метода Ньютона. При этом на каждой итерации система взаимосвязанных линейных уравнений относительно поправок искомых функций решается обычно с помощью метода векторной прогонки *).

Указанный подход использовался при расчете широкого круга внешних и внутренних течений неравновесных газовых смесей на основе полной системы уравнений Навье — Стокса (см., например, работы [135, 136, 144, 148, 161—165]). Опыт расчетов, проведенных в этих и ряде других работ, свидетельствует о том, что построенные таким образом алгоритмы являются высокоустойчивыми и пригодны для анализа течений с быстропротекающими, в том числе и околоравновесными процессами.

Недостаток методов такого типа заключается в резком ($\sim N_k^3$) снижении их экономичности при увеличении числа компонент N_k .

*) Применение для интегрирования исходных уравнений рассмотренных выше НЛФ схем эквивалентно выполнению на каждом шаге по времени только одной итерации по Ньютону.

вследствие роста числа арифметических операций, необходимых для совместного решения разностных аналогов уравнений переноса массы компонент и энергии смеси (2.4), (2.5).

Поэтому для смесей с большим числом компонент во многих случаях более эффективным оказывается другой подход, в рамках которого используется частично неявная аппроксимация химических источников членов. Данный подход, по-видимому, впервые предложенный Блоттпером [166], состоит в том, что в выражении для массовой скорости образования каждой компоненты смеси в результате химических реакций (2.9), которое всегда может быть представлено в форме $\dot{w}_{is} = \Omega_{is} + \omega_{is}c_i$ ($\Omega_{is} \geq 0$, $\omega_{is} \leq 0$), неявно аппроксимируется лишь концентрация этого компонента

$$\dot{w}_{is}^{n+1} = \Omega_{is}^n + \omega_{is}c_i^{n+1} \quad (n - \text{номер временного слоя (итерации)}). \quad (2.29)$$

Очевидно, что это обеспечивает возможность реализации неявных схем путем последовательного решения разностных аналогов исходных уравнений с помощью скалярных прогонок и тем самым позволяет существенно сократить число арифметических операций, необходимых для расчета одного временного шага (итерации) по сравнению со схемами, реализуемыми с помощью векторных прогонок.

В настоящее время описанный прием чрезвычайно широко используется в практике численного моделирования течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей. В частности, подобный подход применяется во всех работах, основанных на алгоритмах SIMPLE и RICE. Аналогичный прием используется также в работах [62, 138—141, 167, 168] при построении экономичных методов расчета течений многокомпонентных газовых смесей с помощью НЛФ схем, основанных на расщеплении по пространственным направлениям и физическим процессам.

Существует, однако, мнение (см., например, [147]), что при расчете течений с быстропротекающими реакциями описанный подход даже при анализе систем с большим числом компонент может оказаться менее экономичным, чем методы, основанные на совместном решении разностных аналогов уравнений переноса массы компонент и энергии смеси, в силу более высокой устойчивости последних. Поэтому вопрос об априорном выборе того или иного способа аппроксимации источников $\dot{w}_{is}$ при расчете околоравновесных течений конкретных смесей в настоящее время остается открытым. С этой точки зрения значительный интерес представляют различные комбинированные методы, такие, например, как метод [169, 170], в рамках которого предварительные значения неизвестных функций определяются с помощью скалярной прогонки по частично неявной разностной схеме с использованием (2.29) для аппроксимации источников $\dot{w}_{is}$. Найденные таким образом значения концентраций и температуры используются в качестве начального

приближения для решения методом Ньютона системы нелинейных алгебраических уравнений, полученных в каждой точке конечно-разностной сетки при полностью неявной аппроксимации химических источников.

При оценке работоспособности численных методов расчета химически неравновесных течений, наряду с устойчивостью этих методов, необходимо принимать во внимание еще одно обстоятельство. Оно связано с потерей точности при вычислении с конечным числом значащих цифр значений величин $\dot{w}_{is}$ в (2.9), которые при околоравновесных условиях представляют собой малую разность двух величин Ω_{is} и $\omega_{is}c_i$, имеющих порядок единицы. В этом смысле преимуществом обладают методы, реализация которых не требует прямого вычисления такой разности. Этим свойством обладают, в частности, описанные выше методы, основанные на представлении дискретных аналогов химических источников $\dot{w}_{is}^{n+1}$ в форме (2.29). В случае же, если реализация алгоритма сопряжена с непосредственным вычислением $\dot{w}_{is}$, как, например, при использовании итерационного метода Ньютона для решения систем нелинейных разностных уравнений, получаемых при полностью неявной аппроксимации химических источников, единственным, по-видимому, способ преодоления указанных трудностей состоит в увеличении числа значащих цифр, используемых при проведении расчетов [171].

5.3.4. Методы расчета диффузионных потоков в многокомпонентных газовых смесях на основе соотношений Стефана — Максвелла. Данный вопрос имеет исключительно важное значение с точки зрения построения экономичных алгоритмов расчета течений многокомпонентных газовых смесей как на основе полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9), так и в рамках приближенных моделей динамики вязких газовых смесей, рассматриваемых в § 6. Это связано с тем, что, в силу сложности соотношений (1.29) для определения коэффициентов диффузии в многокомпонентных газовых смесях, выражения (1.77) для векторов диффузионных потоков отдельных компонент редко используются в практике численного моделирования.

Вместо них применяются эквивалентные (1.29), (1.77) соотношения Стефана — Максвелла (1.39), которые после перехода в них к безразмерным переменным (см. п. 5.1) и простых преобразований принимают вид

$$\mathbf{J}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \frac{c_j m}{m_j D_{ij}} = -\rho \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \frac{c_i m}{m_j D_{ij}} \mathbf{J}_j + \\ + \rho \sum_{j=1}^{N_k} \frac{m c_i c_j}{m_j D_{ij}} (D_j^T - D_i^T) \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} - \rho c_i \left[\frac{\partial \ln m}{\partial \mathbf{r}} + \left(1 - \frac{m_i}{m} \right) \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} \right]. \quad (2.30)$$

Естественный путь решения уравнений динамики вязких многокомпонентных газовых смесей (2.2) — (2.6) совместно с соотношениями (2.30) заключается в использовании последних для исключения векторов $\mathbf{J}_i$ из уравнений переноса массы отдельных компонент и энергии смеси (2.4), (2.5) с последующим численным интегрированием полученной таким образом системы дифференциальных уравнений, не содержащей величин $\mathbf{J}_i$. Такой подход достаточно широко применялся и продолжает использоваться в настоящее время при расчете как внешних, так и внутренних течений газовых смесей, содержащих умеренное число компонент.

Однако при увеличении числа компонент его эффективность резко снижается из-за необходимости обращения матриц размерности $(N_k - 1) \times (N_k - 1)$ на стадии разрешения соотношений Стефана — Максвелла относительно диффузионных потоков (количество необходимых операций возрастает при этом пропорционально $(N_k - 1)^3$). В случае смесей с большим числом компонент ($N_k \geq 10$) это обстоятельство практически исключает возможность использования описанного подхода. Более рациональным в этом случае является применение методов, основанных на использовании различных вычислительных процедур, позволяющих избежать необходимости обращения матриц при определении диффузионных потоков компонент. Такой подход последовательно развивался в работах [34, 142, 172—177].

В частности, в работе [142] описан экономичный итерационный алгоритм реализации неявных конечно-разностных схем, пригодный для решения стационарных и нестационарных многомерных задач динамики многокомпонентных газовых смесей как на основе полной системы уравнений Навье — Стокса, так и в рамках приближенных параболических моделей.

В рамках этого алгоритма (его различные версии описаны в гл. 4—6 данной книги) решение уравнений Стефана — Максвелла осуществляется с помощью метода Зейделя, причем на каждом шаге по времени («глобальной» итерации — при решении стационарных задач методом установления или другими итерационными методами) выполняется только одна итерация по Зейделю. Итерационная процедура метода Зейделя строится на основе следующей формы записи соотношений Стефана — Максвелла (2.30):

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_i = -\frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} + \delta_{J_i}, \quad B_i = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{m_j}{m_i} \frac{c_j}{D_{ij}} \quad (i = 1, 2, \dots, N_k), \\ \delta_{J_i} = \frac{m c_i}{B_i} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{1}{m_j D_{ij}} - \frac{1}{m_i D_{ii}} \right) \mathbf{J}_j + \\ + \frac{\rho c_i}{B_i} \left[\sum_{j=1}^{N_k} \frac{m c_j}{m_j D_{ij}} (D_j^T - D_i^T) \frac{\partial \ln T}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \ln m}{\partial \mathbf{r}} - \left(1 - \frac{m_i}{m} \right) \frac{\partial \ln p}{\partial \mathbf{r}} \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

которая используется также и при аппроксимации диффузионных членов уравнений переноса массы компонент и энергии (2.4), (2.5).

С точки зрения затрат машинного времени этот алгоритм оказывается практически эквивалентным алгоритмам, основанным на использовании для расчета диффузионных потоков приближенной формулы Уилки (1.46). По сравнению же с методами, основанными на прямом решении системы соотношений Стефана — Максвелла (с обращением матриц), он обеспечивает существенную экономию машинного времени, резко повышающуюся с увеличением числа компонент смеси *).

Недостатком описанного метода, так же как и других методов, в которых диффузионные потоки компонент не исключаются из исходной системы уравнений переноса, является необходимость хранения в памяти ЭВМ полей векторов J_i .

§ 6. Приближенные модели внутренних течений газовых смесей

6.1. Предварительные замечания. Проведенный в § 5 анализ современного состояния проблемы численного моделирования внутренних течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей на основе полной системы уравнений Навье — Стокса свидетельствует о том, что за последние десятилетия в этой области достигнуты значительные успехи, открывающие реальную возможность решения многих важных прикладных задач, еще недавно считавшихся недоступными для строгого теоретического анализа. Тем не менее остается и ряд нерешенных проблем, связанных в первую очередь с отсутствием достаточно эффективных и универсальных моделей проницаемых границ внутренних течений, методов расчета дозвуковых и смешанных (до- и сверхзвуковых) течений, а также течений смесей с большим числом компонент, взаимодействие которых описывается разветвленными, многоступенчатыми кинетическими моделями. Кроме того, даже в тех случаях, когда при расчете того или иного течения рассматриваемого класса на основе полной системы уравнений Навье — Стокса не возникает принципиальных трудностей, такой расчет неизбежно связан с большим объемом вычислений и предъявляет весьма высокие требования к быстродействию и объему оперативной памяти используемых ЭВМ.

В связи с этим по-прежнему важную роль играют так называемые приближенные модели внутренних течений газовых смесей, которые строятся на основе полных уравнений Навье — Стокса с использованием тех или иных допущений, отражающих специфические

*) Конкретные примеры, иллюстрирующие эффективность описанного алгоритма, приводятся в последующих главах, посвященных численному исследованию различных типов внутренних течений.

особенности конкретных процессов. Эти модели, конечно, не обладают универсальностью, присущей полной системе уравнений Навье — Стокса, однако в тех случаях, когда принятые при их построении допущения выполняются, использование приближенных моделей является не только вполне оправданным, но и более целесообразным, чем применение полных уравнений Навье — Стокса.

В зависимости от характера допущений, используемых при построении приближенных моделей динамики вязких газовых смесей, эти модели можно разделить на две основные категории.

К первой из них относятся приближенные модели, в основе которых лежат общие фундаментальные уравнения переноса массы, импульса и энергии смеси, а также переноса массы отдельных ее компонент (2.2) — (2.5). Используемые же при построении таких моделей допущения касаются лишь уравнений для векторов плотности потоков массы компонент и энергии смеси (2.7), (2.8) и способов описания конкретных физико-химических процессов, характерных для тех или иных конкретных течений.

Ко второй категории относятся приближенные модели, основывающиеся на использовании допущений, приводящих к принципиальным изменениям формы уравнений переноса (2.2) — (2.5). Наряду с этим в таких моделях, так же как и в моделях первой группы, могут использоваться различные предположения о характере процессов молекулярного переноса и других физико-химических процессов, имеющих место в потоке.

Рассмотрим вначале приближенные модели, относящиеся ко второй группе, а затем проанализируем наиболее распространенные приближенные методы описания физико-химических процессов в газовых потоках, являющихся по существу общими для моделей обеих групп.

6.2. Приближенные модели гипозвуковых течений со сложной структурой. К данному классу можно условно отнести существенно дозвуковые ($M \ll 1$) течения вязких газов и газовых смесей, характеризующиеся наличием одной или нескольких развитых зон рециркуляции. Примерами внутренних течений такого типа могут служить течения в сильно изогнутых каналах, в каналах с резким изменением площади поперечного сечения, естественноконвективные течения в замкнутых объемах и многие другие. Очевидно, что для их описания следует, вообще говоря, использовать полную систему уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9). Однако в силу специфических особенностей дозвуковых внутренних течений вязкого сжимаемого газа, которые обсуждались в п. 5.3.2, расчет таких течений на основе полных уравнений Навье — Стокса связан с серьезными трудностями, возникающими как на стадии постановки граничных условий к этим уравнениям на проницаемых границах расчетной области, так и на стадии их численного интегрирования. С другой стороны, именно благодаря этим особенностям для описания гипозвуковых течений вязких газов и газовых смесей оказы-

вается возможным построение весьма эффективных приближенных моделей, которые в широком диапазоне изменения определяющих параметров практически не уступают по точности полной системе уравнений Навье — Стокса.

В настоящее время сложилась определенная иерархия приближенных моделей существенно дозвуковых течений, включающая классическую модель вязкой несжимаемой жидкости [13], приближение Буссинеска и его различные модификации [87, 178—180], а также разработанную в последние годы усилиями ряда авторов [88, 109, 167, 168, 181—188] модель для описания дозвуковых течений вязких газов и газовых смесей при наличии в потоке произвольных конечных изменений плотности, обусловленных неизотермичностью потока и (или) неоднородностью состава газовой смеси.

Проведем последовательное рассмотрение этих моделей, используя единый подход, основанный на представлении каждой из них как предельной формы полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9) при стремлении к нулю соответствующих определяющих параметров течения. Для того чтобы процедура получения таких «предельных» моделей была корректной, необходимо перейти в системе уравнений (2.2) — (2.9) от переменных $\bar{h}$, c_i и $\bar{p}$, изменяющихся в общем случае в некоторых неопределенных пределах, к другим переменным, изменение которых заведомо происходит в интервале порядка единицы. Этому требованию удовлетворяют переменные $\tilde{T}$ и $\tilde{c}_i$, определяемые соотношениями

$$\tilde{T} = \frac{T - T^*(\bar{t})}{\Delta T^0} = \frac{\bar{T} - \bar{T}^*(\bar{t})}{\varepsilon_T}, \quad \varepsilon_T = \frac{\Delta T^0}{T^0}, \quad (2.32)$$

$$\tilde{c}_i = \frac{c_i - c_i^*(\bar{t})}{\varepsilon_{c_i}}, \quad \varepsilon_{c_i} = \Delta c_i^0. \quad (2.33)$$

Здесь функции $\bar{T}^*(\bar{t})$ и $c_i^*(\bar{t})$ представляют собой некоторые характерные для рассматриваемого течения «средние» уровни соответствующих величин ($\bar{T}$ и c_i), а безразмерные параметры ε_T и ε_{c_i} характеризуют степень пространственной неоднородности температуры и состава смеси (ΔT^0 — характерное для рассматриваемого течения значение перепада температуры смеси, а $\Delta c_i^0 = \varepsilon_{c_i}$ — концентрации i -й компоненты смеси).

Аналогичным образом вместо слабо изменяющегося в дозвуковых потоках безразмерного статического давления $\bar{p}$ следует ввести безразмерное (отнесенное к удвоенному динамическому напору $\rho_0(u_0)^2$) динамическое давление, изменяющееся в пределах от нуля до значения порядка единицы, независимо от числа Маха потока

$$\tilde{p} = \frac{\bar{p} - \bar{p}^*(\bar{t}) \exp\left(\frac{\bar{m}^* g l^0}{\bar{T}^* R} \frac{g}{g} \cdot \bar{r}\right)}{\rho^0 (u^0)^2} = \frac{\bar{p} - \bar{p}^*(\bar{t}) \exp\left(\varepsilon_g \frac{\bar{m}^*(\bar{t})}{\bar{T}^*(\bar{t})} \frac{g}{g} \cdot \bar{r}\right)}{\gamma M^2}. \quad (2.34)$$

Здесь $\bar{p}^*(\bar{t}) \exp\left(\varepsilon_g \frac{\bar{m}^*(\bar{t})}{\bar{T}^*(\bar{t})} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \bar{\mathbf{r}}\right)$ — характерное значение безразмерного гидростатического давления, $\varepsilon_g = \frac{gl^0 \bar{m}^0}{RT^0}$ — параметр гидростатической сжимаемости (аналог квадрата числа Маха для естественноконвективных течений), а $\bar{m}^*(\bar{t})$ — характерный уровень молекулярного веса смеси*).

$$(\bar{m}^*)^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{c_j^*(\bar{t})}{\bar{m}_j}. \quad (2.35)$$

В соответствии с (2.32) — (2.34) связь между переменными $\bar{h}$, c_i , $\bar{p}$ и $\bar{T}$, $\tilde{c}_i$, $\tilde{p}$ определяется соотношениями

$$\bar{T} = \varepsilon_T \tilde{T} + T^*(\bar{t}), \quad (2.36)$$

$$c_i = \varepsilon_{c_i} \tilde{c}_i + c_i^*(\bar{t}), \quad (2.37)$$

$$\bar{p} = \gamma M^2 \tilde{p} + \bar{p}^*(\bar{t}) \exp\left(\varepsilon_g \frac{\bar{m}^*(\bar{t})}{\bar{T}^*(\bar{t})} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \bar{\mathbf{r}}\right), \quad (2.38)$$

а также выражением (1.64), определяющим связь между энтальпией, составом и температурой смеси:

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \mathbf{r}} = \varepsilon_T \tilde{c}_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} \varepsilon_{c_j} \bar{h}_j \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} = \varepsilon_T \tilde{c}_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \bar{t}} + \tilde{c}_p \frac{d\bar{T}^*}{d\bar{t}} + \sum_{j=1}^{N_h} \left(\varepsilon_{c_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \bar{t}} + \frac{dc_j^*}{d\bar{t}} \right) \bar{h}_j. \quad (2.40)$$

С использованием (2.35) — (2.40) систему уравнений (2.2) — (2.9) можно преобразовать к виду (черта над безразмерными переменными для удобства записи опущена):

$$\text{Sh} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sh} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \bar{t}} + \left(\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = \\ & = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Fr}} \left[\rho - \rho^* \exp\left(\varepsilon_g \frac{\bar{m}^*}{\bar{T}^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \bar{\mathbf{r}}\right) \right] + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \mathbf{e} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.42)$$

*) Функции $\bar{T}^*(\bar{t})$, $c_i^*(\bar{t})$ и $\bar{p}^*(\bar{t})$ могут быть определены либо как некоторые средние по пространству значения соответствующих параметров, либо положены равными известным из граничных условий характерным значениям этих параметров на проницаемых границах расчетной области. Некоторые конкретные способы задания $\bar{T}^*$, c_i^* и $\bar{p}^*$ будут рассмотрены в гл. 6.

$$\text{Sh } \rho \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{s=1}^{N_R} \frac{\text{Da}_s}{\varepsilon_{c_i}} w_{is} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sh} \left[\rho c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \rho c_p \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} + \rho \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ & + \rho \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \text{Sh} \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ \frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \left[\frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} + \right. \right. \\ & + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rho^* \left(\frac{1}{m^*} \frac{dm^*}{dt} - \frac{1}{T^*} \frac{dT^*}{dt} \right) \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \left. \right\} \exp \left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right) + \\ & + \frac{\gamma-1}{\gamma} \mathbf{v} \cdot \left[\frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rho^* \exp \left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right) + \frac{2(\gamma-1) M^2}{\varepsilon_T \text{Re}} \mu \dot{S}^2, \quad (2.44) \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\gamma M^2 \tilde{p} + p^* \exp \left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right)}{(\varepsilon_T \tilde{T} + T^*) [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]}, \quad \tilde{m}^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j}{m_j}, \quad (2.45)$$

$$\rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} = & - \rho (\varepsilon_{c_i} \tilde{c}_i + c_i^*) \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left\{ \frac{\varepsilon_{c_j} / \varepsilon_{c_i}}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \right. \\ & - \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{m^{-1} + (m^*)^{-1}} \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{1}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial \mathbf{r}} \left. \right] + (\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*) \left[\frac{1}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} - 1 \right] \times \\ & \times \frac{\frac{\gamma M^2}{\varepsilon_{c_i}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{c_i}} \rho^* \exp \left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{\mathbf{g}}{g}}{\gamma M^2 \tilde{p} + p^* \exp \left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right)} \left. \right\} + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{c_i}} \frac{1}{(\varepsilon_T \tilde{T} + T^*)} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2.47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} = & - \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \times \right. \\ & \times \left[\gamma M^2 \tilde{p} + p^* \exp \left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right) \right] \sum_{j=1}^{N_h} \frac{k_{Tj}}{\rho (\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*)} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} \left. \right\}, \quad (2.48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{J_i}{\varepsilon_T} = & -\rho(\varepsilon_{c_i}\tilde{c}_i + c_i^*) \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left\{ \frac{\varepsilon_{c_j}/\varepsilon_T}{m_j[\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial r} - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\varepsilon_{c_j}\tilde{c}_j + c_j^*}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}/\varepsilon_{c_j}}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial r} \right] + (\varepsilon_{c_j}\tilde{c}_j + c_j^*) \left[\frac{1}{m_j[\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} - 1 \right] \times \right. \\ & \left. \times \frac{\frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rho^* \exp\left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{g}\right) \frac{g}{g}}{\gamma M^2 \tilde{p} + p^* \exp\left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{g}\right)} \right\} + \frac{1}{\varepsilon_T \tilde{T} + T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right\}, \quad (2.49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{w}_{is} = & m_i(v_{is}'' - v_{is}') k_s^+ \rho \sum_{j=1}^{N_h} v_{js}' \left[\prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}\tilde{c}_j + c_j^*}{m_j} \right)^{v_{js}'} - \right. \\ & \left. - \frac{K_s}{K_{ps}} \left(\frac{\gamma M^2 \tilde{p} + p^* \exp\left(\varepsilon_g \frac{m^*}{T^*} \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{g}\right)}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \right)^{\sum_{j=1}^{N_h} (v_{js}'' - v_{js}')} \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}\tilde{c}_j + c_j^*}{m_j} \right)^{v_{js}''} \right]. \quad (2.50) \end{aligned}$$

Поскольку рассматриваемый класс течений характеризуется малыми значениями числа Маха M и параметра гидростатической сжимаемости ε_g , то естественно предположить, что для описания таких течений при некоторых конечных значениях $M^2 \ll 1$ и $\varepsilon_g \ll 1$ может быть использована предельная форма системы уравнений (2.41) — (2.50).

Кроме того, во многих случаях, представляющих практический интерес, наряду с параметрами M^2 и ε_g , малые значения принимают все или некоторые из параметров, характеризующих степень пространственной неоднородности полей температуры, состава и плотности смеси $(\varepsilon_T, \varepsilon_{c_i}, \varepsilon_\rho)$ или какие-либо их комбинации. Соответствующие этим случаям приближенные модели, очевидно, также могут быть получены из системы уравнений (2.41) — (2.50) путем надлежащих предельных переходов.

6.2.1. Приближение Буссинеска и модель вязкой несжимаемой жидкости. Эти модели являются классическими моделями течений рассматриваемого класса и уже на протяжении многих лет широко и плодотворно используются для их теоретического анализа.

Приближение Буссинеска в его простейшей форме предназначено для описания смешанно- и естественноконвективных течений, характеризуемых малыми значениями числа Маха и параметра гидростатической сжимаемости, а также параметров $\varepsilon_T, \varepsilon_{c_i}$ (а следовательно, и ε_ρ , так как $\varepsilon_\rho = O\{\max(\varepsilon_T, \varepsilon_{c_i})\}$) и отношений $M^2/\varepsilon_T, \varepsilon_g/\varepsilon_T, M^2/\varepsilon_{c_i}, \varepsilon_g/\varepsilon_{c_i}$. Иными словами, эта модель описывает гипозвуко-

вые смешанно- и естественноконвективные течения, в которых малы относительные пространственные неоднородности температуры и состава смеси и, кроме того, диссипативные эффекты пренебрежимо малы по сравнению с изменениями температуры смеси, обусловленными процессами тепломассообмена.

Для получения системы уравнений, описывающей смешанноконвективное течение многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси в поле силы тяжести в рамках приближения Буссинеска, перейдем в системе уравнений (2.41) — (2.50) к пределу при стремлении к нулю перечисленных выше параметров, т. е. при

$$\begin{aligned} M \rightarrow 0, \quad \varepsilon_g \rightarrow 0, \quad \varepsilon_T \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0, \\ \frac{M^2}{\varepsilon_T} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rightarrow 0, \quad \frac{M^2}{\varepsilon_{c_i}} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{c_i}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Остальные безразмерные параметры подобия и их комплексы, входящие в систему уравнений (2.41) — (2.50), будем считать конечными величинами. Совершая указанный предельный переход, после несложных преобразований получим следующую систему уравнений концентрационно-тепловой смешанной конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{\text{Fr}} \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_\rho} \frac{m^* \tilde{c}_j}{m_j} + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_\rho} \frac{\tilde{T}}{T^*} \right) \frac{\mathbf{g}}{g} - \\ - \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mu \dot{\mathbf{S}}), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\rho^*} \sum_{s=1}^{N_R} \frac{\text{Da}_s}{\varepsilon_{c_i}} w_{is} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \left[c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + c_p \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} + \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ + \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \text{Sh} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{\rho^*} \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} - \\ - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right), \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\rho = \rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.56)$$

$$\frac{J_i}{\varepsilon_{c_i}} = -\rho^* c_i^* \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_{c_i}} \frac{m^*}{m_j} \left(\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial r} - c_j^* \sum_{k=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_k}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{m^*}{m_k} \frac{\partial \tilde{c}_k}{\partial r} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{c_i}} \frac{1}{T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right\}, \quad (2.57)$$

$$\frac{q}{\varepsilon_T} = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{J_j}{\varepsilon_T} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p^*}{\rho^*} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{k_{Tj}}{c_j} \frac{J_j}{\varepsilon_T} \right), \quad (2.58)$$

$$\frac{J_i}{\varepsilon_T} = -\rho^* c_i^* \left[\sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{m^*}{m_j} \left(\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial r} - c_j^* \sum_{k=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_k}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{m^*}{m_k} \frac{\partial \tilde{c}_k}{\partial r} \right) + \frac{1}{T} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right], \quad (2.59)$$

$$\dot{w}_{is} = \dot{w}_{is}(t) = m_i (\dot{v}_{is}'' - \dot{v}_{is}') k_s^+ (\rho^*)^{\sum_{j=1}^{N_h} v_{js}'} \left[\prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j^*}{m_j} \right)^{v_{js}'} - \right. \\ \left. - \frac{K_s}{K_{ps}} (p^* m^*)^{\sum_{j=1}^{N_h} (v_{js}'' - v_{js}')} \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j^*}{m_j} \right)^{v_{js}''} \right]. \quad (2.60)$$

Отметим, что при получении уравнения неразрывности (2.52) использовалась очевидная оценка $d\rho^*/dt = O(\varepsilon_p)$, т. е. предполагалось, что $d\rho^*/dt \rightarrow 0$ при $\varepsilon_p \rightarrow 0$. Кроме того, следует иметь в виду, что в силу малости параметров ε_T и ε_{c_i} (см. 2.51), теплофизические свойства смеси, входящие в систему уравнений (2.52) — (2.60), являются функциями только T^* , c_i^* и p^* , т. е. так же как и w_{is} (2.60), не зависят от r^* .

В случае естественноконвективных течений в физической формулировке задачи отсутствует какая-либо характерная скорость. В этом случае роль масштаба скорости, формально введенного при получении безразмерных уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9), очевидно, играет скорость «всплытия» под воздействием выталкивающей архимедовой силы, возникающей в поле силы тяжести вследствие неоднородности поля плотности в потоке, т. е. величина

$$u^0 = \sqrt{gl^0 \varepsilon_p}. \quad (2.61)$$

) В литературе (см., например, [178—180]) обычно приводится несколько иная форма системы уравнений естественной и смешанной конвекции в приближении Буссинеска, справедливая для частного случая течений, в которых T^ , c_i^* и p^* являются постоянными величинами. Естественно, что в этом частном случае переносные и теплофизические свойства смеси также являются постоянными (не зависящими ни от r , ни от t).

При этом число Фруда (2.14), входящее в уравнение переноса импульса (2.53), становится тождественно равным единице

$$\text{Fr} = \frac{(u^0)^2}{gl^0 \varepsilon_\rho} = \frac{gl^0 \varepsilon_\rho}{gl^0 \varepsilon_\rho} \equiv 1, \quad (2.62)$$

квадрат числа Маха является комбинацией трех параметров подобия — параметра гидростатической сжимаемости, показателя адиабаты и параметра ε_ρ :

$$\text{M}^2 \equiv \frac{1}{\gamma} \varepsilon_g \varepsilon_\rho, \quad (2.63)$$

а роль числа Рейнольдса играет корень из числа Архимеда

$$\text{Re} = \frac{\rho^0 u^0 l^0}{\mu^0} = \frac{\rho^0 \sqrt{gl^0 \varepsilon_\rho} l^0}{\mu^0} = \sqrt{\text{Ar}}. \quad (2.64)$$

Совершая указанные замены в (2.41) — (2.50) и переходя в них к пределу при

$$\varepsilon_g \rightarrow 0, \quad \varepsilon_T \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rightarrow 0, \quad \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{c_i}} \rightarrow 0, \quad (2.65)$$

получим систему уравнений концентрационно-тепловой естественной конвекции в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = \\ = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \left(\sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_\rho} \frac{m^*}{m_j} \tilde{c}_j + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_\rho} \frac{\tilde{T}}{T^*} \right) \frac{\mathbf{g}}{g} - \frac{2}{\sqrt{\text{Ar}}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mu \dot{\mathbf{S}}), \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\rho^*} \sum_{s=1}^{N_R} \frac{\text{Da}_s}{\varepsilon_{c_i}} w_{is} - \frac{1}{\sqrt{\text{Ar}}} \frac{1}{\text{Sc}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \left[c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + c_p \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} + \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ + \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \text{Sh} \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{\rho^*} \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} - \frac{1}{\sqrt{\text{Ar}}} \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right), \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\rho = \rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.70)$$

где $\mathbf{J}_i$, $\mathbf{q}$ и w_{is} определяются выражениями (2.57) — (2.60).

Наконец, если дополнительно к (2.51) потребовать, чтобы число Фруда было много больше единицы, т. е. предположить, что ролью естественной конвекции можно пренебречь по сравнению с вынужденной конвекцией ($\sqrt{g l^0 \varepsilon_p} \ll u^0$), то из (2.41) — (2.50) легко получить систему уравнений, описывающую вынужденную конвекцию неизотермической газовой смеси в рамках модели вязкой несжимаемой жидкости. Для этого достаточно перейти в (2.41) — (2.50) к пределу при

$$M \rightarrow 0, \quad \frac{1}{Fr} \rightarrow 0, \quad \varepsilon_T \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0, \quad \frac{M^2}{\varepsilon_T} \rightarrow 0, \quad \frac{M^2}{\varepsilon_{c_i}} \rightarrow 0. \quad (2.71)$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.72)$$

$$Sh \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2}{Re} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mu \dot{\mathbf{S}}), \quad (2.73)$$

$$Sh \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\rho^*} \sum_{s=1}^{N_R} \frac{Da_s}{\varepsilon_{c_i}} \dot{w}_{is} - \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \quad (2.74)$$

$$Sh \left[c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + c_p \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} + \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] +$$

$$+ \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = Sh \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{\rho^*} \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} - \frac{1}{Re Pr} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right), \quad (2.75)$$

$$\rho = \rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.76)$$

где $\mathbf{J}_i$, $\mathbf{q}$ и w_{is} по-прежнему определяются с помощью (2.57) — (2.60).

Наряду с системами уравнений (2.52) — (2.60), (2.66) — (2.70) и (2.72) — (2.76), описывающими в рамках приближения Буссинеска (модели вязкой несжимаемой жидкости) соответственно общие случаи смешанной, естественной и вынужденной конвекции неизотермической многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси, из (2.41) — (2.50) могут быть получены аналогичные системы, описывающие различные частные случаи таких течений, например, тепловую естественную и смешанную конвекцию однородного вязкого газа или, наоборот, изотермическое течение газовой смеси. Для этого достаточно перейти в соответствующих уравнениях к пределу при $\varepsilon_{c_i}/\varepsilon_T \rightarrow 0$ или при $\varepsilon_T/\varepsilon_{c_i} \rightarrow 0$ соответственно, т. е. предположить, что пространственная неоднородность состава газовой смеси много меньше пространственной неоднородности поля температуры, или, наоборот, что изменения плотности обусловлены исключительно изменением состава газовой смеси.

С другой стороны, на основе (2.41) — (2.50) могут быть получены и более общие по сравнению с рассмотренными выше модифи-

кации модели вязкой несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска для неизотермических течений вязких газовых смесей. Эти модификации соответствуют тем случаям, когда параметры ε_g и M^2 , определяющие степень влияния на характеристики течения эффектов гидростатической сжимаемости смеси, работы сил давления и вязкой диссипации кинетической энергии, имеют тот же порядок, что и параметры ε_T и ε_{c_i} , характеризующие степень пространственной неоднородности температуры и состава смеси в потоке, обусловленной тепломассообменом на его границах и химическими реакциями. Очевидно, что для получения систем уравнений, описывающих смешанную, естественную и вынужденную конвекцию многокомпонентной газовой смеси, в этом случае необходимо вместо предельных переходов (2.51), (2.65), (2.71) совершить в (2.41) — (2.50) предельные переходы при

$$M \rightarrow 0, \quad \varepsilon_g \rightarrow 0, \quad \varepsilon_T \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0, \quad (2.77)$$

$$\varepsilon_g \rightarrow 0, \quad \varepsilon_T \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0 \quad (2.78)$$

или

$$M \rightarrow 0, \quad \frac{1}{Fr} \rightarrow 0, \quad \varepsilon_T \rightarrow 0, \quad \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0 \quad (2.79)$$

для смешанной, естественной и вынужденной конвекции соответственно.

Приведем в качестве примера системы уравнений, получаемые таким образом для случаев естественной и вынужденной конвекции газовой смеси.

Переходя в (2.41) — (2.50) к пределу (2.78) с учетом (2.63) (2.64), получим следующую систему уравнений естественной конвекции:

$$\frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.80)$$

$$Sh \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \left(\sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_\rho} \frac{m^*}{m_j} \tilde{c}_j + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_\rho} \frac{\tilde{T}}{T^*} \right) \frac{\mathbf{g}}{g} - \frac{2}{\sqrt{Ar}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mu \dot{\mathbf{S}}), \quad (2.81)$$

$$Sh \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\rho^*} \sum_{s=1}^{N_R} \frac{Da_s}{\varepsilon_{c_i}} \dot{w}_{is} - \frac{1}{\sqrt{Ar} Sc} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \quad (2.82)$$

$$Sh \left[c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + c_p \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} + \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ + \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ Sh \left[\frac{1}{\rho^*} \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \left(\frac{1}{m^*} \frac{dm^*}{dt} - \frac{1}{T^*} \frac{dT^*}{dt} \right) \frac{\mathbf{g}}{g} \cdot \mathbf{r} \right] + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} \right\} - \frac{1}{\sqrt{Ar} Pr} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right), \quad (2.83)$$

$$\rho = \rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.84)$$

$$\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} = -\rho^* c_i^* \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_{c_i}} \frac{m^*}{m_j} \left(\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - c_j^* \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{m^*}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial \mathbf{r}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{c_i}} \frac{c_j^* \rho^*}{p^*} \left(\frac{m^*}{m_j} - 1 \right) \frac{\mathbf{g}}{g} \right] + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{c_i}} \frac{1}{T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.85)$$

$$\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p^*}{\rho^*} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{k_{Tj}}{c_j^*} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} \right), \quad (2.86)$$

$$\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_T} = -\rho^* c_i^* \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{m^*}{m_j} \left(\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - c_j^* \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{m^*}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial \mathbf{r}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \frac{c_j^* \rho^*}{p^*} \left(\frac{m^*}{m_j} - 1 \right) \frac{\mathbf{g}}{g} \right] + \frac{1}{T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\}. \quad (2.87)$$

Совершенно аналогично, переходя в (2.41) — (2.50) к пределу (2.79), получим систему уравнений вынужденной конвекции:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.88)$$

$$\text{Sh} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho^*} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{2}{\text{Re}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\mu \dot{\mathbf{S}}), \quad (2.89)$$

$$\text{Sh} \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\rho^*} \sum_{s=1}^{N_R} \frac{\text{Da}_s}{\varepsilon_{c_i}} \dot{w}_{is} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \quad (2.90)$$

$$\text{Sh} \left[c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + c_p \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} + \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ + \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \text{Sh} \frac{1}{\rho^*} \left(\frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} + \frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) + \\ + (\gamma-1) \frac{M^2}{\varepsilon_T} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right) + 2 \frac{\gamma-1}{\text{Re}} \frac{M^2}{\varepsilon_T} \frac{1}{\rho^*} (\mu \dot{\mathbf{S}}^2), \quad (2.91)$$

$$\rho = \rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.92)$$

$$\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} = -\rho^* c_i^* \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_{c_i}} \frac{m^*}{m_j} \left(\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - c_j^* \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{m^*}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial \mathbf{r}} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma M^2}{\varepsilon_{c_i}} \frac{c_j^*}{p^*} \left(\frac{m^*}{m_j} - 1 \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} \right] + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{c_i}} \frac{1}{T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.93)$$

$$\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left(\sum_{j=1}^{N_h} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{p^*}{\rho^*} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{k_{Tj}}{c_j^*} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} \right), \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_T} = & -\rho^* c_i^* \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{m^*}{m_j} \left(\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - c_j^* \sum_{k=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_k}}{\varepsilon_{c_j}} \frac{m^*}{m_k} \frac{\partial c_k}{\partial \mathbf{r}} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{c_j^*}{p^*} \left(\frac{m^*}{m_j} - 1 \right) \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} \right] + \frac{1}{T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Отметим, что при выводе систем уравнений (2.80)–(2.87), (2.88)–(2.95), как и во всех предыдущих случаях, предполагается, что $dT^*/dt = O(\varepsilon_T)$, а $dc_i^*/dt = O(\varepsilon_{c_i})$, поэтому

$$\frac{dT^*}{dt} \rightarrow 0, \quad \frac{dc_i^*}{dt} \rightarrow 0, \quad \frac{dm^*}{dt} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon_T, \varepsilon_{c_i} \rightarrow 0 \quad (2.96)$$

Характеризуя полученные выше различные модификации модели вязкой несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска, следует подчеркнуть, что, несмотря на их значительные различия, все они обладают одной общей особенностью, которая, собственно, и позволяет рассматривать системы уравнений (2.52)–(2.60), (2.66)–(2.70), (2.72)–(2.76), (2.80)–(2.95) и другие аналогичные им системы как единый класс моделей динамики вязких газовых смесей. Эта особенность состоит в том, что вместо общего уравнения неразрывности для смеси (2.2), входящего в полную систему уравнений Навье–Стокса, в них входит условие несжимаемости $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{v} = 0$, а уравнение состояния имеет вид $\rho^* = \rho^*(t)$.

С математической точки зрения данное обстоятельство является чрезвычайно важным, так как благодаря ему системы уравнений, описывающие различные типы течений вязких газовых смесей в рамках модели несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска, теряют гиперболические свойства, присущие полной системе уравнений Навье–Стокса (2.2)–(2.9). Вследствие этого, в частности, при использовании указанных моделей отпадают рассмотренные в п. 5.3.2 § 5 принципиальные трудности, связанные с численным интегрированием уравнений Навье–Стокса при малых значениях числа Маха потока и, что особенно важно, с постановкой граничных условий к этим уравнениям на дозвуковых проницаемых границах расчетной области (см. п. 5.2.3). Так, в качестве граничных условий к сформулированным выше системам уравнений на «входной» и «выходной» (см. рис. 2.1) границах внутренних течений могут, вообще говоря, использоваться любые наборы условий, согласующиеся с физической постановкой рассматриваемой задачи (наибольшее распространение получило задание условий первого рода для всех искомых функций (составляющих вектора скорости, концентраций отдельных компонентов смеси и температуры) на вход-

ной границе и различных типов граничных аппроксимаций (мягких граничных условий) — на выходной [30, 32, 87]).

Наконец, как видно из систем уравнений (2.72) — (2.76), (2.88) — (2.95), в случае вынужденной конвекции динамические характеристики потока (поля скорости и давления), определяемые из уравнений несжимаемости и переноса импульса, не зависят от описываемых уравнениями (2.74), (2.75) или (2.90), (2.91) процессов переноса энергии смеси и массы ее отдельных компонент. Иными словами, в рамках модели несжимаемой жидкости решение динамической части задачи о расчете вынужденной конвекции неизотермической многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси ничем не отличается от решения в рамках той же модели задачи о расчете изотермического течения однородного газа *).

Таким образом, важные вычислительные преимущества, связанные с использованием модели вязкой несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска для анализа медленных (существенно дозвуковых) течений газовых смесей являются совершенно очевидными.

Однако не менее очевидной является ограниченность указанного подхода, которая особенно остро проявляется при исследовании внутренних течений.

Дело в том, что, в отличие от классических внешних задач дозвуковой газовой динамики, для которых предположения об адиабатичности потока ($\varepsilon_T \ll 1$) и об однородности состава газа ($\varepsilon_{ci} \ll 1$) являются вполне естественными и с большой степенью точности выполняются на практике, значительная часть дозвуковых внутренних задач связана с течениями неоднородных химически реагирующих газовых смесей при наличии теплообмена. Более того, характерной чертой в развитии современной техники является тенденция к повышению теплонапряженности конструкций и интенсификации процессов тепло- и массообмена в различных аппаратах и устройствах. Это стимулирует изучение течений, в которых, несмотря на существенно дозвуковой характер, имеют место значительные пространственно-временные изменения плотности и других теплофизических и переносных свойств смеси. Примерами таких потоков могут служить течения в трактах охлаждения реактивных двигателей, в теплообменниках ядерных реакторов, в камерах сгорания, генераторах плазмы и т. п. Изменение температуры газа, а следовательно, и его плотности в таких устройствах может достигать де-

*) При расчете в рамках приближения Буссинеска естественно- и смешанноконвективных течений (системы уравнений (2.52) — (2.60), (2.66) — (2.70), (2.80) — (2.87)) из-за зависимости сил плавучести от полей концентрации и температуры c_i и T (см. второй член в правой части уравнений (2.53), (2.67), (2.81)) возникает несколько более сложная ситуация. Однако и в этом случае нелинейная взаимосвязь между термодинамическими параметрами потока и его динамическими параметрами гораздо слабее, чем при использовании полных уравнений Навье — Стокса для сжимаемых газовых смесей.

сятков и даже сотен раз. При течениях многих газовых смесей даже в изотермических условиях изменения плотности в потоке могут иметь такие же масштабы из-за различия молекулярных весов компонентов. Так, например, в смесях метана с воздухом, анализ течений которых необходим для прогнозирования и предотвращения аварийных ситуаций в шахтах, плотность в потоке в зависимости от состава смеси может изменяться в $\approx 1,5$ раза, а в водородовоздушных смесях, широко используемых в энергомашиностроении, — в 14 раз.

Ясно, что адекватное описание таких течений в рамках модели несжимаемой жидкости или приближения Буссинеска едва ли является возможным, несмотря на их существенно дозвуковой характер.

В связи с этим представляется целесообразным, сохранив в силе допущения о малости квадрата числа Маха и параметра гидростатической сжимаемости, отказаться от лежащих в основе приближения Буссинеска дополнительных допущений о малости параметров ε_T , ε_{c_i} , ε_ρ и построить на этой основе модели существенно дозвуковых течений газовых смесей, не имеющие каких-либо ограничений по степени неоднородности температуры, состава и плотности смеси, определяемой этими параметрами.

6.2.2. Модели существенно дозвуковых течений многокомпонентных газовых смесей при наличии произвольных изменений плотности [182—188]. Для получения системы уравнений смешанно-конвективных течений газовых смесей при $M^2 \ll 1$ и $\varepsilon_g \ll 1$, следуя описанному выше общему подходу, перейдем в полной системе уравнений Навье — Стокса (2.41) — (2.50) к пределу при

$$M \rightarrow 0, \quad \varepsilon_g \rightarrow 0, \quad (2.97)$$

считая все остальные безразмерные параметры подобия, входящие в (3.41) — (3.50), конечными величинами.

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\text{Sh} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.98)$$

$$\text{Sh} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Fr}} (\rho - \rho^*) \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \mathbf{e} \right) \right] \quad (2.99)$$

$$\text{Sh} \rho \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{d \tilde{c}_i^*}{dt} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{s=1}^{N_R} \frac{\text{Da}_s}{\varepsilon_{c_i}} \dot{w}_{is} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \quad (2.100)$$

$$\begin{aligned} & \text{Sh} \rho \left[c_p \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{d T^*}{dt} \right) + \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{d c_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ & + \rho \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \text{Sh} \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{d p^*}{dt} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right), \quad (2.101) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{p^*}{(\varepsilon_T \tilde{T} + T^*) [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]}, \quad \tilde{m}^{-1} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j}{m_j}, \quad (2.102)$$

$$\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} = -\rho (\varepsilon_{c_i} \tilde{c}_i + c_i^*) \left\{ \sum_{j=1}^{N_k} D_{ij} \frac{\varepsilon_{c_j}/\varepsilon_{c_i}}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \sum_{h=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_h}/\varepsilon_{c_j}}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial \mathbf{r}} \right] + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{c_i} (\varepsilon_T \tilde{T} + T^*)} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.103)$$

$$\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left[p^* \sum_{j=1}^{N_k} \frac{k_{Tj}}{\rho (\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*)} \frac{\mathbf{J}_j}{\varepsilon_T} \right] \right\}, \quad (2.104)$$

$$\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_T} = -\rho (\varepsilon_{c_i} \tilde{c}_i + c_i^*) \left\{ \sum_{j=1}^{N_k} D_{ij} \frac{\varepsilon_{c_j}/\varepsilon_T}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \sum_{h=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_h}/\varepsilon_{c_j}}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial \mathbf{r}} \right] + \frac{D_{i1}}{\varepsilon_T \tilde{T} + T^*} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right\}, \quad (2.105)$$

$$\dot{w}_{is} = m_i (\dot{v}_{is}'' - \dot{v}_{is}') k_s^+ \rho \sum_{j=1}^{N_k} v_{js}' \left[\prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{m_j} \right)^{v_{js}'} - \right. \\ \left. - \frac{K_s}{K_{ps}} \left(\frac{p^*}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \right)^{\sum_{j=1}^{N_k} (v_{js}'' - v_{js}')} \prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{m_j} \right)^{v_{js}''} \right]. \quad (2.106)$$

Аналогичным образом, переходя в (2.41)–(2.50) к пределу при $\varepsilon_g \rightarrow 0$ (2.107)

с учетом (2.63), (2.64), можно получить систему уравнений, описывающую естественную конвекцию многокомпонентной газовой смеси при малых ε_g и произвольных конечных изменениях температуры, состава и плотности смеси. Она отличается от системы уравнений смешанной конвекции (2.98)–(2.106) лишь тем, что число Фруда в ней тождественно равно единице, а число Рейнольдса переходит в корень квадратный из числа Архимеда.

Наконец, переходя в (2.41)–(2.50) к пределу при

$$M \rightarrow 0, \quad \frac{1}{\text{Fr}} \rightarrow 0, \quad (2.108)$$

получим систему уравнений для описания существенно дозвуковой вынужденной конвекции газовых смесей при наличии произвольных конечных пространственных неоднородностей температуры и состава смеси, характеризуемых параметрами ε_T и ε_{c_i} . Эта система

отличается от аналогичной системы уравнений для случая смешанной конвекции (2.98) — (2.106) только формой уравнения переноса импульса (2.99), в правой части которого в случае вынужденной конвекции $\left(\frac{1}{Fr} \rightarrow 0\right)$ отсутствует член с архимедовой силой:

$$Sh \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \dot{\varepsilon} \right) \right]. \quad (2.109)$$

Комментируя систему уравнений (2.80) — (2.89) и ее аналоги для естественной и вынужденной конвекции, уместно еще раз отметить, что они справедливы лишь при условии конечности параметров ε_T и ε_{c_i} . С учетом того, что при выводе (2.80) — (2.89) параметры M и ε_g предполагаются малыми, это означает, что малыми являются также величины M^2/ε_T , M^2/ε_{c_i} , $\varepsilon_g/\varepsilon_T$ и $\varepsilon_g/\varepsilon_{c_i}$.

Для получения моделей существенно дозвуковых течений, свободных от этого ограничения, необходимо при совершении в (2.41) — (2.50) предельных переходов (2.97), (2.107) и (2.108) сохранить члены, имеющие порядок указанных величин. В результате для случая смешанной конвекции получим следующую систему уравнений, справедливую при любых, в том числе и малых ε_T и ε_{c_i} :

$$Sh \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.110)$$

$$Sh \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{\varepsilon_p Fr} (\rho - \rho^*) \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \dot{\varepsilon} \right) \right], \quad (2.111)$$

$$Sh \rho \left(\frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_{c_i}} \frac{dc_i^*}{dt} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{s=1}^{N_R} \frac{Da_s}{\varepsilon_{c_i}} \dot{w}_{is} - \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_i}{\varepsilon_{c_i}} \right), \quad (2.112)$$

$$\begin{aligned} Sh \rho \left[c_p \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dT^*}{dt} \right) + \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j \right] + \\ + \rho \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_j}}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right) = \frac{\gamma-1}{\gamma} Sh \left(\frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} + \frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} \right) + \\ + \frac{\gamma-1}{\gamma} \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rho^* \frac{\mathbf{g}}{g} \right) - \frac{1}{Re Pr} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon_T} \right) + \frac{2(\gamma-1)M^2}{Re \varepsilon_T} \mu \dot{S}^2, \end{aligned} \quad (2.113)$$

$$\rho = \frac{p^*}{(\varepsilon_T \tilde{T} + T^*)[\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]}, \quad (2.114)$$

$$\frac{J_i}{\varepsilon_{c_i}} = -\rho (\varepsilon_{c_i} \tilde{c}_i + c_i^*) \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left\{ \frac{\varepsilon_{c_j}/\varepsilon_{c_i}}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial r} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}/\varepsilon_{c_j}}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial r} \right] + \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{p^*} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} - 1 \right] \left(\frac{\gamma M^2}{\varepsilon_{c_i}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_{c_i}} \rho^* \frac{g}{g} \right) \right\} + \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_{c_i} (\varepsilon_T \tilde{T} + T^*)} \frac{D_i^T}{\partial r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right\}, \quad (2.115)$$

$$\frac{q}{\varepsilon_T} = -\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{Pr}{Sc} \left[\sum_{j=1}^{N_h} \frac{J_j}{\varepsilon_T} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} p^* \sum_{j=1}^{N_h} \frac{k_{Tj}}{\rho (\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*)} \frac{J_j}{\varepsilon_T} \right], \quad (2.116)$$

$$\frac{J_i}{\varepsilon_T} = -\rho (\varepsilon_{c_i} \tilde{c}_i + c_i^*) \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left\{ \frac{\varepsilon_{c_j}/\varepsilon_T}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial r} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}} \sum_{h=1}^{N_h} \frac{\varepsilon_{c_h}/\varepsilon_{c_j}}{m_h} \frac{\partial \tilde{c}_h}{\partial r} \right] + \frac{\varepsilon_{c_j} \tilde{c}_j + c_j^*}{p^*} \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{m_j [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} - 1 \right] \left(\frac{\gamma M^2}{\varepsilon_T} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rho^* \frac{g}{g} \right) \right\} + \frac{1}{\varepsilon_T \tilde{T} + T^*} D_i^T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \right\}. \quad (2.117)$$

Очевидно, что с точки зрения полноты описания течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей сформулированные выше математические модели занимают промежуточное место между полной системой уравнений Навье — Стокса (2.41) — (2.50) и рассмотренными в предыдущем разделе моделями вязкой несжимаемой жидкости и Буссинеска. Если обозначить индексом «мах» максимальные значения параметров M^2 , ε_g , ε_p и M^2/ε_p , $\varepsilon_g/\varepsilon_p$, при которых еще возможно использование соответствующих приближенных моделей, то области их применимости можно условно изобразить на плоскости ε_p , M^2 (или ε_p , ε_g — см. рис. 2.2, а, б). Эти рисунки наглядно иллюстрируют, в какой области параметров следует использовать ту или иную модификацию рассмотренных в данном разделе моделей гипозвуковых течений вязких газовых смесей*). Кроме того, из рисунков видно, что границы применимости

*) Неясным остается лишь вопрос о выборе конкретных значений $(M^2)_{\max}$, $(\varepsilon_p)_{\max}$ и т. д., который может быть решен только на основе специальных численных исследований. Некоторые результаты таких исследований будут рассмотрены в гл. 6.

моделей типа (2.110) — (2.117), (2.98) — (2.106) существенно шире границ применимости соответствующих модификаций модели вязкой несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска.

С другой стороны, может показаться, что системы уравнений (2.110) — (2.117), (2.98) — (2.106) мало чем отличаются от полной системы уравнений Навье — Стокса, и поэтому их вычислительные

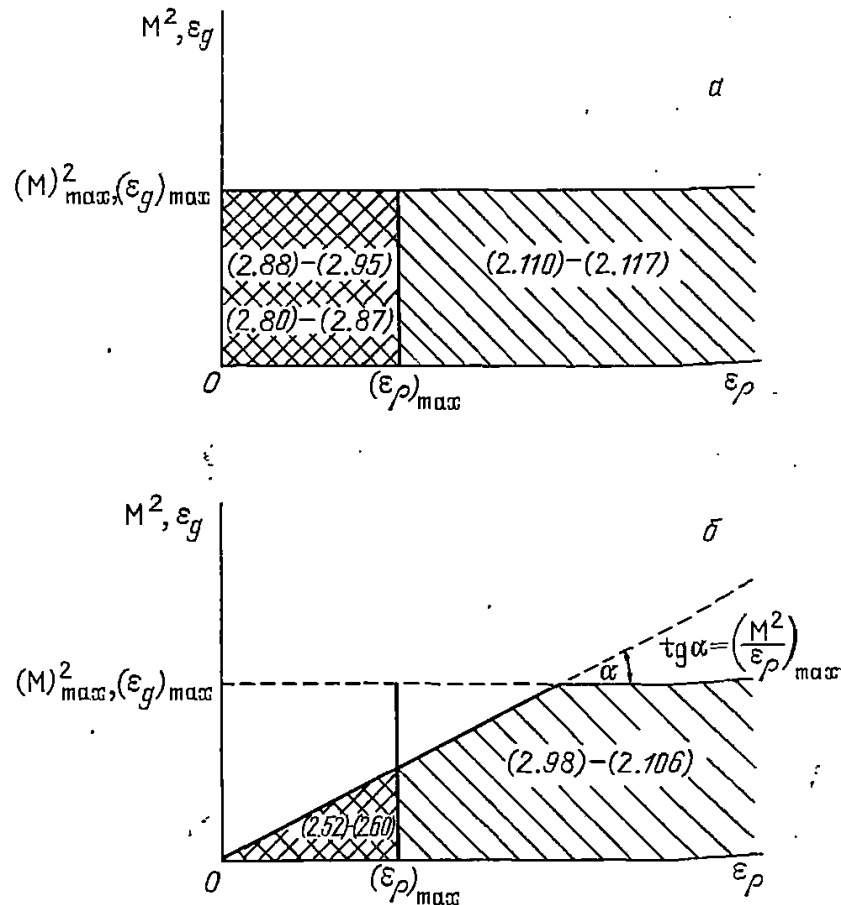


Рис. 2.2. Границы применимости различных приближенных моделей существенно дозвуковых течений по величинам квадрата числа Маха, параметра гидростатической сжимаемости ε_g и параметров ε_ρ и M^2/ε_ρ

преимущества перед этой системой несущественны. Однако в действительности, с точки зрения простоты численной реализации, эти модели практически не уступают приближению Буссинеска. Для того чтобы показать это, преобразуем уравнение неразрывности (2.98), исключив из него производные от плотности $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}$ с помощью уравнения состояния (2.102).

Тогда после несложных преобразований получим

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\rho(\varepsilon_T \tilde{T} + T^*)} \left[\text{Sh} \left(\rho \varepsilon_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \rho \frac{dT^*}{dt} \right) + \varepsilon_T \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right] +$$

$$+ \frac{1}{\rho [\tilde{m}^{-1} + (m^*)^{-1}]} \left[\text{Sh } \rho \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{m_j} \left(\varepsilon_{c_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{dc_j^*}{dt} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{m_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} \right] - \text{Sh } \frac{1}{p^*} \frac{dp^*}{dt}. \quad (2.118)$$

Преобразуем далее правую часть (2.118) с учетом уравнения переноса энергии смеси (2.101) и массы ее отдельных компонент (2.100)

$$\begin{aligned} \text{Sh } \rho \left(\varepsilon_T \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{dT^*}{dt} \right) + \varepsilon_T \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} = \\ = \frac{1}{c_p} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \text{Sh } \frac{dp^*}{dt} - \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \text{Sh } \rho \sum_{j=1}^{N_k} \left(\varepsilon_{c_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{dc_j^*}{dt} \right) h_j + \rho \mathbf{v} \cdot \right. \\ \left. \sum_{j=1}^{N_k} \varepsilon_{c_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} h_j \right] = \frac{1}{c_p} \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} \text{Sh } \frac{dp^*}{dt} - \frac{1}{\text{RePr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s h_j \dot{w}_{js} + \frac{1}{\text{ReSc}} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_j h_j \right], \quad (2.119) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sh } \rho \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{m_j} \left(\varepsilon_{c_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial t} + \frac{dc_j^*}{dt} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\varepsilon_{c_j}}{m_j} \frac{\partial \tilde{c}_j}{\partial \mathbf{r}} = \\ = \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \frac{1}{m_j} \dot{w}_{js} - \frac{1}{\text{ReSc}} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_j}{m_j} \right). \quad (2.120) \end{aligned}$$

Подставляя (2.119) и (2.120) в правую часть (2.118), получим следующую форму уравнения неразрывности (2.98):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{p^*} \left[\text{Sh} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{1}{c_p m} - 1 \right) \frac{dp^*}{dt} + \frac{1}{\text{ReSc}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{h_j m_j}{c_p m} - T \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_j}{m_j} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{RePr}} \frac{1}{mc_p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + \sum_{j=1}^{N_k} \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \left(T - \frac{h_j m_j}{c_p m} \right) \frac{1}{m_j} \dot{w}_{js} \right]. \quad (2.124) \end{aligned}$$

Из этого уравнения, представляющего собой обобщенное условие несжимаемости $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0$ в модели вязкой несжимаемой жидкости и приближении Буссинеска, становится ясным, что с математической точки зрения система уравнений (2.110)–(2.117), описывающая смешанно-конвективные течения газовых смесей при $M^2, \varepsilon_g \ll 1$ и произвольных значениях ε_p , аналогична указанным приближенным моделям. Однако в отличие от приближения Буссинеска, полностью исключающего сжимаемость (возможность изменения удельного объема смеси), в рамках моделей (2.98)–(2.106) и (2.110)–

(2.117) не учитывается только изменение удельного объема под воздействием неоднородности поля давления (см. уравнение состояния (2.114) и уравнение неразрывности в форме (2.121)), что является вполне оправданным при описании существенно дозвуковых течений. Все остальные физические механизмы изменения удельного объема в рамках этой модели полностью сохраняются. В частности, она адекватно описывает процессы расширения и сжатия смеси вследствие изменения во времени среднего уровня давления ($dp^*/dt \neq 0$), диффузионного переноса массы и энергии в неоднородной по температуре и составу смеси и, наконец, в результате тепловыделения и изменения числа молей в единице объема смеси при протекании химических реакций. Таким образом, сохраняя рассмотренные в разделе 6.2.1 важные вычислительные преимущества приближения Буссинеска, система уравнений (2.110) — (2.117) и ее аналоги для случаев естественной и вынужденной конвекции многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей с точки зрения полноты описания гипозвуковых течений практически не уступают системе уравнений Навье — Стокса (2.41) — (2.50).

Завершая рассмотрение приближенных математических моделей существенно дозвуковых течений, следует сделать еще одно замечание, касающееся выбора основных термодинамических переменных в сформулированных выше системах уравнений для описания различных типов течений данного класса. Все эти системы записаны относительно переменных $\bar{T}$, $\tilde{c}_i$ и $\bar{p}$, определяемых соотношениями (2.32) — (2.34). Как уже отмечалось, использование этих или аналогичных им переменных является обязательным на стадии вывода соответствующих уравнений. Однако с вычислительной точки зрения использование переменных $\bar{T}$ и $\tilde{c}_i$ необходимо лишь при численном моделировании течений, характеризующихся слабой пространственной неоднородностью температуры и состава смеси, т. е. малыми значениями параметров ε_T и ε_{c_i} . Применение в таких случаях обычных безразмерных переменных, например, безразмерной энтальпии смеси $\bar{h}$ и массовых концентраций отдельных компонент смеси c_i , относительно которых записана полная система уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9), может приводить к значительному снижению точности расчета из-за малости входящих в эти уравнения пространственных производных от $\bar{h}$ и c_i . В случае же расчета гипозвуковых потоков вязкого газа, в которых имеют место значительные неоднородности температуры и (или) состава, т. е. потоков, характеризующихся произвольными конечными значениями ε_T и ε_{c_i} , наряду с переменными $\bar{T}$ и $\tilde{c}_i$, могут использоваться и другие безразмерные переменные, в частности, $\bar{h}$ и c_i или $\bar{T}$ и c_i^*). Для

*) Поскольку в существенно дозвуковых газовых потоках величина статического давления изменяется слабо, при численном моделировании таких течений во всех случаях предпочтительно использовать в качестве основной переменной динамическое давление $\bar{p}$.

описания таких течений предназначена система уравнений (2.98) — (2.206) и ее аналоги для вынужденной и естественной конвекции однородных газов и газовых смесей. Используя соотношения (2.36), (2.37), после несложных преобразований можно представить (2.98) — (2.106) в виде (черта над безразмерными переменными, как и ранее, опущена)

$$\text{Sh} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.122)$$

$$\text{Sh} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Fr}} (\rho - \rho^*) \frac{\mathbf{g}}{g} + \\ + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \dot{\mathbf{e}} \right) \right], \quad (2.123)$$

$$\text{Sh} \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \dot{w}_{is} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_i, \quad (2.124)$$

$$\text{Sh} \rho \left(c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N_h} h_j \frac{\partial c_j}{\partial t} \right) + \rho \mathbf{v} \cdot \left(c_p \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{j=1}^{N_h} h_j \frac{\partial c_j}{\partial \mathbf{r}} \right) = \\ = \text{Sh} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp^*}{dt} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}, \quad (2.125)$$

$$\rho = p^* m / T, \quad m^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} c_j / m_j, \quad \rho^* = p^* m^* / T^*, \quad (2.126)$$

$$\mathbf{J}_i = - \rho c_i \left[\sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{c_j m}{m_j} \right) + D_i^T \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right], \quad (2.127)$$

$$\mathbf{q} = - \lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left[\sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{J}_j h_j + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p^*}{\rho^*} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{k_{Tj}}{\varepsilon_j} \mathbf{J}_j \right], \quad (2.128)$$

$$\dot{w}_{is} = m_i (v''_{is} - v'_{is}) k_s^+ \rho \sum_{j=1}^{N_h} v'_{js} \left[\prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v'_{js}} - \right. \\ \left. - \frac{K_s}{K_{ps}} (p^* m)^{\sum_{j=1}^{N_h} (v''_{js} - v'_{js})} \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v''_{js}} \right]. \quad (2.129)$$

Наконец, используя соотношение (1.64), уравнение переноса энергии (2.124) можно записать через удельную энтальпию смеси h :

$$\text{Sh} \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \text{Sh} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp^*}{dt} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}. \quad (2.130)$$

Отметим, что именно при такой форме записи системы уравнений (2.98) — (2.106) наиболее наглядно проявляются ее отличия от полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9), служившей отправной точкой для построения различных приближенных моделей гипозвуковых течений, рассмотренных в данном разделе.

6.2.3. О методах расчета дозвуковых течений в рамках приближенных моделей. Всесторонний анализ существующих методов численного интегрирования систем уравнений, лежащих в основе модели вязкой несжимаемой жидкости и приближения Буссинеска, содержится в уже упоминавшихся монографиях О. М. Белоцерковского [30], В. М. Пасконова, В. И. Полежаева и Л. А. Чудова [87] и Роуча [32]. Оценивая общее состояние исследований в данной области, можно констатировать, что в настоящее время разработаны достаточно эффективные (универсальные и экономичные) конечно-разностные методы расчета стационарных и нестационарных двумерных течений в рамках этих моделей, основанные на записи исходных уравнений в переменных Ψ , Ω (функция тока, вихрь скорости) [32, 87]. Наряду с этим достигнуты значительные успехи в построении методов численного интегрирования уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, записанных в естественных переменных x , y [30, 87]. По сравнению с методами, основанными на использовании переменных Ψ , Ω , они обладают рядом важных преимуществ, заключающихся прежде всего в простоте реализации граничных условий и возможности расчета трехмерных течений. Кроме того, в отличие от методов первой группы, эти методы легко адаптируются к расчету гипозвуковых течений однородного вязкого газа и многокомпонентных газовых смесей при наличии произвольных изменений плотности в рамках моделей, описанных в п. 6.2.2. В частности, в работах [183—187, 189—197] для решения нестационарных двумерных и трехмерных задач естественной и смешанной конвекции на основе этих моделей с успехом применяются методы, являющиеся обобщением различных вариантов экономичного и простого в реализации частично неявного SMAC метода [198], разработанного для расчета течений несжимаемой жидкости.

Для расчета стационарных течений рассматриваемого класса более эффективным оказывается обобщение так называемых релаксационных методов расчета течений вязкой несжимаемой жидкости, основанных на введении искусственной сжимаемости [199—201] и последовательном применении принципа расщепления по физическим процессам и пространственным направлениям [31]. Не останавливаясь на деталях таких методов, которые обсуждаются в гл. 6 настоящей книги, отметим только, что хотя опыт использования рассмотренных в п. 6.2.2 моделей для расчета дозвуковых течений газовых смесей при наличии произвольных изменений плотности пока относительно невелик, он достаточно убедительно свидетельствует об отсутствии каких-либо принципиальных трудностей при

обобщении на этот случай методов решения уравнений вязкой несжимаемой жидкости, записанных в естественных переменных.

6.3. Параболизированные модели внутренних течений вязких газовых смесей. Наибольшее распространение при численном моделировании внутренних течений в настоящее время получили три приближенные модели данного типа: приближение пограничного слоя, приближение узкого канала и модель, основанная на использовании так называемых упрощенных или параболизированных уравнений Навье — Стокса.

Использование всех этих моделей для описания реальных течений вязких газовых смесей является, вообще говоря, оправданным лишь в тех случаях, когда в потоке имеется некоторое преобладающее направления движения, причем процессы распространения возмущений вверх по потоку в этом направлении являются несущественными. Иными словами, в основе параболизированных моделей течений вязких газов и газовых смесей лежит допущение о наличии в потоке пространственной анизотропии, выражающейся в существенном различии характерных линейных размеров и скоростей для различных пространственных направлений. Вторым условием применимости моделей данной группы, очевидно, является условие $Re^{-1} \ll 1$ (Re — число Рейнольдса, построенное по линейному масштабу и масштабу скорости для основного направления течения), поскольку только при его выполнении становится оправданным допущение о несущественной роли процессов молекулярного переноса импульса, энергии и массы в многокомпонентной газовой смеси, вследствие которых возможно распространение возмущений в направлении, противоположном основному направлению течения *).

Наряду с этими допущениями, общими для всех параболизированных моделей, при построении каждой из них используются те или иные дополнительные упрощающие предположения, определяющие их специфические особенности.

6.3.1. Приближение пограничного слоя. При выводе классических уравнений пограничного слоя, впервые проведенном Прандтлем, предполагается, что характерное число Рейнольдса потока, построенное по характерным, продольным (в направлении основного потока) масштабам длины и скорости l^0 и u^0 , достаточно велико, так что выполняется условие

$$Re_l^{-1/2} \ll 1. \quad (2.131)$$

При этом влияние вязких эффектов (процессов молекулярного переноса) проявляется лишь в тонком (имеющем толщину порядка $l^0/Re_l^{1/2}$, l^0 — характерный продольный размер) пограничном слое,

*) Именно с этими процессами связаны эллиптические свойства полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9). Отсюда становится ясным происхождение термина «параболизированные», применяемого для моделей, в которых процессы молекулярного переноса в одном из пространственных направлений не учитываются.

прилегающем к обтекаемой поверхности. В остальной области течение может рассматриваться как невязкое и описывается уравнениями газовой динамики (системой уравнений Эйлера). Не останавливаясь на хорошо известных деталях вывода системы уравнений многокомпонентного химически реагирующего пограничного слоя (см. по этому поводу специальные монографии [8, 202]), приведем здесь лишь используемую в дальнейшем при решении конкретных задач (см. гл. 5) безразмерную форму этой системы, соответствующую случаю стационарного двумерного (плоского или осесимметричного) течения газовой смеси в канале переменного сечения (см. рис. 2.3):

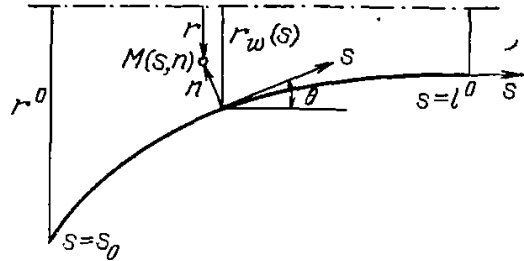


Рис. 2.3. Системы координат, используемые при описании внутренних течений

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho u r^\alpha) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho v r^\alpha) = 0, \quad (2.132)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial s} + \rho v \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial n} \left(r^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial n} \right), \quad (2.133)$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (2.134)$$

$$\begin{aligned} \rho u c_p \frac{\partial T}{\partial s} + \rho v c_p \frac{\partial T}{\partial n} + \rho u \sum_{j=1}^{N_k} h_j \frac{\partial c_j}{\partial s} + \rho v \sum_{j=1}^{N_k} h_j \frac{\partial c_j}{\partial n} = \\ = -\frac{1}{Pr} \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial n} (r^\alpha q_n) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \left[u \frac{dp}{ds} + \gamma M^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.135)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial c_i}{\partial s} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial n} = \sum_{s=1}^{N_R} Da_s \dot{w}_{is} - \frac{1}{Sc} \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial n} (r^\alpha J_{in}) \\ (i = 1, 2, \dots, N_k), \end{aligned} \quad (2.136)$$

$$\rho = \frac{pm}{T}, \quad m^{-1} = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{c_j}{m_j}, \quad (2.137)$$

$$r = r_w(s) - \frac{1}{\sqrt{Re_l}} \frac{l^0}{r^0} n \cos \theta. \quad (2.138)$$

Здесь $\alpha = 0$ для плоского и $\alpha = 1$ для осесимметричного течения; s , n и u , v — продольная и поперечная координаты (см. рис. 2.3) и составляющие вектора скорости*); q_n и J_{in} — поперечные состав-

*) С учетом пространственной анизотропии течения в пограничном слое, о которой говорилось выше, для этих величин использованы различные масштабы: длина контура канала l^0 и значение продольной составляющей вектора скорости на входе в канал u^0 для s' и u' и величины $l^0/Re_l^{1/2}$ и $u^0/Re_l^{1/2}$ для n' и v' соответственно (штрихом обозначены размерные переменные).

ляющие векторов теплового и диффузионного потоков, определяемые из общих соотношений (2.8) — (2.9) с учетом того, что в рамках приближения пограничного слоя $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$. Остальные обозначения в (2.133) — (2.137) совпадают с обозначениями, использовавшимися при записи полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9).

В тех случаях, когда толщина пограничного слоя, в осесимметричном канале δ , имеющая порядок $l^0/\text{Re}_l^{1/2}$, много меньше радиуса поперечной кривизны канала r_w , т. е. выполняется условие

$$\frac{1}{\text{Re}_l^{1/2}} \frac{l^0}{r^0} \ll 1, \quad (2.139)$$

система уравнений (2.132) — (2.138) несколько упрощается. В частности, уравнение неразрывности (2.132) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho u r_w) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho v r_w) = 0, \quad (2.140)$$

а остальные уравнения принимают вид уравнений для плоского течения ($\alpha = 0$).

Граничные условия к системе уравнений пограничного слоя на стенках канала ($n = 0$) совпадают по форме с общими граничными условиями на твердых стенках (2.22) для полной системы уравнений Навье — Стокса. Разница состоит лишь в том, что, в силу различия масштабов для продольных и поперечных координат и составляющих вектора скорости в пограничном слое, в соотношениях (2.22.3), (2.22.4) в данном случае отсутствует множитель Re перед членами, содержащими безразмерный параметр вдува $m_f = m'_f \text{Re}_l^{1/2} / (\rho^0 u^0)$.

На внешней границе пограничного слоя ($n \rightarrow \infty$) должны быть заданы распределения давления, продольной составляющей вектора скорости, температуры и состава смеси, которые, как уже отмечалось, определяются в результате предварительного расчета невязкого течения в канале на основе уравнений Эйлера для многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси.

Наконец, во «входном» сечении канала (при $s = s_0$) должны быть заданы профили продольной составляющей вектора скорости, температуры (энтальпии) смеси и концентраций ее отдельных компонент

$$u = u_0(n), \quad T = T_0(n), \quad c_i = c_{i0}(n) \quad \text{при } s = s_0. \quad (2.141)$$

Как видно из приведенных уравнений и граничных условий, в рамках приближения пограничного слоя постановка внутренних задач динамики вязких многокомпонентных газовых смесей с формальной точки зрения ничем не отличается от постановки аналогичных задач внешнего обтекания (см., например, [8, 202]). Тем не менее с точки зрения границ применимости приближения пограничного слоя определенная разница между внутренними и внешни-

ми течениями все-таки имеется. Она состоит в следующем. Если при расчете внешнего обтекания тела произвольной формы толщина вытеснения пограничного слоя

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dn \quad (2.142)$$

становится сравнимой с поперечными размерами тела, то расчет параметров потока на внешней границе пограничного слоя уже не может быть выполнен независимо от расчета течения в пограничном слое и должен осуществляться с помощью хорошо известной итерационной процедуры по толщине вытеснения δ^* [202]. Однако каких-либо формальных ограничений сверху на величину δ^* при этом не возникает. Совсем иная ситуация имеет место при расчете на основе приближения пограничного слоя внутренних течений. В этом случае толщина вытеснения, очевидно, не должна превышать полувысоты (радиуса) канала, так как при $\delta^* \gg r_w$ расчет становится невозможным даже с формальной точки зрения: полувысота (радиус) канала, на стенках которого необходимо определить параметры невязкого потока, т. е. величина $r_w^3 = r_w - \delta^*$, обращается в ноль или становится отрицательной. В действительности же использование приближения пограничного слоя для расчета течений в каналах становится неоправданным уже тогда, когда перестает выполняться более мягкое условие $\delta < r_w^*$, так как при его нарушении разбиение потока в канале на пограничный слой и невязкое ядро становится невозможным, т. е. нарушается одно из основных положений теории пограничного слоя. Иными словами, для того чтобы применение приближения пограничного слоя при расчете течения вязких газов и газовых смесей в каналах было оправданным, необходимо, чтобы наряду с условием (2.131) выполнялось неравенство

$$\delta = O\left(\frac{l^0}{\sqrt{\text{Re}_l}}\right) < r^0 \text{ или } \text{Re}_l > O\left(\left(\frac{l^0}{r^0}\right)^2\right). \quad (2.143)$$

Во многих практических задачах параметр l^0/r^0 принимает достаточно большие значения, т. е.

$$\varepsilon = r^0/l^0 \ll 1. \quad (2.144)$$

Очевидно, что в таких случаях условие (2.143) может оказаться более жестким, чем (2.131). Именно по этой причине для расчета течений вязких газов и газовых смесей в каналах с большими значениями параметра l^0/r^0 , наряду с приближением пограничного

*) Здесь под δ понимается максимальная из толщин динамического, теплового и диффузионного пограничных слоев.

слоя, широко используется другая параболическая модель внутренних течений — так называемое приближение узкого канала.

6.3.2. Приближение узкого канала. Данная модель, в отличие от приближения пограничного слоя, предназначена исключительно для описания внутренних течений. Как следует из самого ее названия, модель основывается на характерных геометрических особенностях, анализируемых с ее помощью течений. Под узким понимается такой канал, размеры которого в основном направлении течения много больше его размеров в сечениях, перпендикулярных этому направлению, т. е. канал, для которого выполняется условие (2.144). Кроме того, предполагается, что локальные значения тангенса угла наклона стенок канала к основному направлению течения также невелики ($\operatorname{tg} \theta = O(\epsilon)$), а число Рейнольдса, построенное по характерному продольному размеру, наоборот, достаточно велико, т. е.

$$\operatorname{Re}_l = \frac{\rho^0 u^0 l^0}{\mu^0} \gg 1. \quad (2.145)$$

Получаемая в рамках перечисленных допущений приближенная система уравнений по форме совпадает с системой уравнений пограничного слоя. Поэтому модели пограничного слоя и узкого канала иногда не разделяют между собой, называя их обе моделями типа пограничного слоя. Однако, наряду со сходством, приближения пограничного слоя и узкого канала имеют и некоторые принципиальные различия. Для того чтобы показать это, проведем вывод системы уравнений динамики вязких газовых смесей в приближении узкого канала, основываясь на полной системе уравнений Навье — Стокса (1.72) — (1.78) и допущениях (2.144), (2.145). Это тем более целесообразно, что в литературе указанный вывод не приводится, а соответствующая система уравнений записывается на основе соображений физического характера по аналогии с системой уравнений пограничного слоя.

Рассмотрим для простоты частный случай стационарной вынужденной конвекции многокомпонентной газовой смеси в плоском или осесимметричном канале переменного сечения.

Имея в виду пространственную анизотропию течений рассматриваемого класса, обусловленную выполнением условия (2.144), при приведении полной системы уравнений Навье — Стокса (1.72) — (1.78), на основе которой проводится вывод приближения узкого канала, к безразмерному виду следует выбрать различные масштабы для продольных и поперечных координат и составляющих вектора скорости.

Масштабами для поперечной и продольной координат должны, очевидно, служить характерные поперечный r^0 и продольный l^0 размеры канала.

В качестве масштаба продольной составляющей скорости естественно выбрать среднерасходную скорость потока в канале u^0 ,

а для поперечной — некоторую неопределенную пока величину v^0 . Масштабы для остальных переменных, входящих в систему уравнений (1.72) — (1.78), выберем точно так же, как это было сделано при получении системы уравнений (2.2) — (2.9) (см. п. 5.1).

С учетом такого выбора масштабов из полной системы уравнений Навье — Стокса (1.72) — (1.78) легко получить ее безразмерную форму записи в декартовой ($\alpha = 0$) или цилиндрической ($\alpha = 1$) системе координат для рассматриваемого случая стационарного плоского или осесимметричного течения газовой смеси в канале при отсутствии силы тяжести ($1/\text{Fr} \rightarrow 0$). В частности, уравнение неразрывности для смеси (1.72) при этом принимает вид (черта над безразмерными переменными опущена)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y}(y^\alpha \rho v) \frac{v^0 l^0}{u^0 r^0} = 0. \quad (2.146)$$

Из (2.146) следует, что для того, чтобы безразмерные компоненты вектора скорости u , v и их производные по координатам x , y были величинами порядка единицы, а это является условием правильности выбора масштабов для u , v , x , и y , необходимо, чтобы масштаб v^0 для поперечной составляющей вектора скорости определялся соотношением $v^0 = u^0 r^0 / l^0$, используя которое, систему уравнений Навье — Стокса (1.72) — (1.78) для рассматриваемого случая можно представить в следующей окончательной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y}(y^\alpha \rho v) = 0, \quad (2.147)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}_r} \frac{l^0}{r^0} \left\{ \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3 y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial y^\alpha v}{\partial y} \right) \right] \right\}, \quad (2.148)$$

$$\left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \left(\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}_r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4}{3 y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha \frac{v}{y} \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{2\mu}{y} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\}, \quad (2.149)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \\ = \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \dot{w}_{is} + \frac{l^0/r^0}{\text{Re}_r \text{Sc}} \left[\frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha J_{iy}) + \left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} (J_{ix}) \right] \quad (2.150) \\ (i = 1, 2, \dots, N_k),$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - \frac{l^0/r^0}{\text{Re}_r \text{Pr}} \left[\frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha q_y) + \right. \\ \left. + \left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \frac{\partial q_x}{\partial x} \right] + \frac{2(\gamma-1)M^2}{\text{Re}_r} \left(\frac{l^0}{r^0} \right) \mu \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 + \left(\frac{r^0}{l^0} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \alpha \left(\frac{v}{y} \right)^2 \right] \right\}, \quad (2.151) \end{aligned}$$

$$p = \rho T \frac{1}{m}, \quad m^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{c_j}{m_j}, \quad \text{Re}_r = \frac{\rho^0 u^0 r^0}{\mu^0}, \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} J_{ix} = -\rho c_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(c_j \frac{m}{m_j} \right) + c_j \left(\frac{m}{m_j} - 1 \right) \frac{\partial \ln p}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial x} \right\}, \quad (2.153.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{iy} = -\rho c_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(c_j \frac{m}{m_j} \right) + c_j \left(\frac{m}{m_j} - 1 \right) \frac{\partial \ln p}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right\}, \quad (2.153.2) \end{aligned}$$

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_h} J_{jx} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} p \sum_{j=1}^{N_h} k_{Tj} \frac{J_{jx}}{\rho c_j}, \quad (2.154.1)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_h} J_{jy} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} p \sum_{j=1}^{N_h} k_{Tj} \frac{J_{jy}}{\rho c_j}. \quad (2.154.2)$$

Для получения из уравнений (2.147)–(2.154) системы уравнений, описывающей рассматриваемое течение в приближении узкого канала, в соответствии с (2.144), (2.145) перейдем в этих уравнениях к пределу при $\varepsilon = r^0/l^0 \rightarrow 0$ и $1/\text{Re}_l \rightarrow 0$, считая все остальные безразмерные параметры и их комбинации конечными величинами. В результате будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha \rho v) = 0, \quad (2.155)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\text{Re}_r \varepsilon y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.156)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (2.157)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s w_{is} - \frac{1}{\text{Re}_r \text{Sc} \varepsilon y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha J_{iy}), \quad (2.158)$$

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} u \frac{dp}{dx} - \frac{1}{\text{Re}_r \text{Pr} \varepsilon y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha q_y) + \frac{(\gamma - 1) M^2}{\text{Re}_r \varepsilon} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (2.159)$$

$$p = \rho T \frac{1}{m}, \quad m^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{c_j}{m_j}, \quad (2.160)$$

$$J_{iy} = -\rho c_i \left\{ \sum_{j=1}^{N_h} D_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(c_j \frac{m}{m_j} \right) \right] + D_i^T \frac{\partial \ln T}{\partial y} \right\}, \quad (2.161)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_h} J_{jy} h_j + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} p \sum_{j=1}^{N_h} k_{Tj} \frac{J_{iy}}{\rho c_j}. \quad (2.162)$$

Отметим, что при получении системы уравнений узкого канала (2.155) — (2.162) явно не используется допущение о малости локальных углов наклона стенок канала к оси x , которое, как уже отмечалось, обычно включают в число допущений, определяющих применимость этой приближенной модели [203, 204]. Однако при соответствующем определении поперечного и продольного линейных масштабов r^0 и l^0 условие $\text{tg } \theta \ll 1$ автоматически выполняется при выполнении условия $\varepsilon = r^0/l^0 \ll 1$, на котором основывается приведенный выше вывод. Поясним сказанное несколькими типичными примерами.

На рис. 2.4 схематично изображены каналы трех различных конфигураций.

Для первого из них (рис. 2.4, а) выбор поперечного и продольного масштабов является однозначным: это максимальное значение радиуса канала r^0 и его длина l^0 . При этом $\text{tg } \theta = r^0/l^0 = \varepsilon$, так что условия $\text{tg } \theta \ll 1$ и $\varepsilon \ll 1$ являются в данном случае тождественными.

Для второго и третьего каналов (рис. 2.4, б, в), кроме двух основных или, другими словами, интегральных масштабов r^0 и l^0 , характеризующих размеры канала в целом, имеются два других — локальных масштаба $(r^0)'$ и $(l^0)'$, причем очевидно, что возможность применения приближения узкого канала, по крайней мере в локальном смысле, определяется значением отноше-

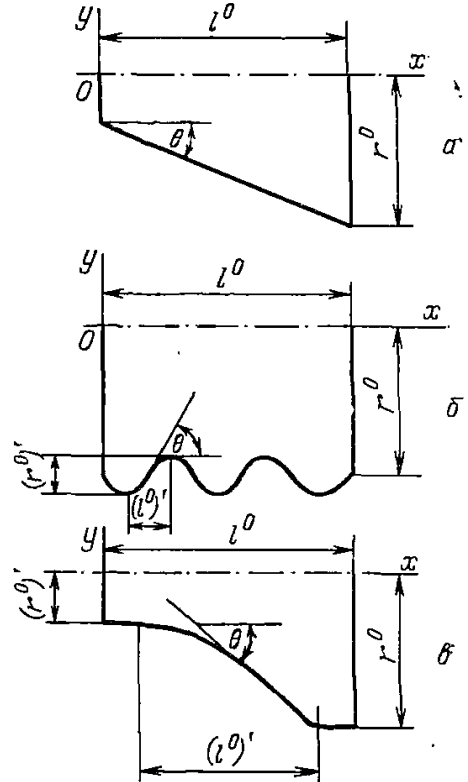


Рис. 2.4. Каналы различных конфигураций

ния $(r^0)'/(l^0)'$, которое по порядку величины равно максимальному тангенсу угла наклона стенок канала к оси x . Таким образом, и в этих двух случаях требование малости углов θ оказывается эквивалентным требованию малости параметра ε .

В качестве граничных условий к системе уравнений узкого канала (2.155) — (2.162) на твердых стенках используются общие условия (2.22). С учетом малости угла наклона стенок канала к оси x для рассматриваемого случая двумерного течения они могут быть записаны в виде*)

$$\begin{aligned}
 u = 0, \quad v = \frac{m_f}{\rho_w}, \quad T = T_w(x), \\
 -\lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \left(\sum_{j=1}^{N_h} J_{jy} h_j + \frac{\gamma-1}{\gamma} p \sum_{j=1}^{N_h} k_{Tj} \frac{J_{jy}}{\rho c_j} \right) + \\
 + \varepsilon \text{Re}_r \text{Pr} m_f \sum_{j=1}^{N_h} [c_j h_j - (c_j h_j)_-] = q_w, \\
 J_{iy} + \varepsilon \text{Re}_r \text{Sc} m_f [c_i - (c_i)_-] = \sum_{s=1}^{N_{Rw}} \text{Da}_{sw} g_{is}, \quad (2.163)
 \end{aligned}$$

где $m_f > 0$ соответствует отсосу, а $m_f < 0$ — вдуву газа через стенки канала.

На входе в канал (при $x = x_0$) задаются профили продольной составляющей скорости, энтальпии или температуры смеси, концентраций ее компонент и значения давления

$$u = u_0(y), \quad h = h_0(y), \quad c_i = c_{i0}(y), \quad p = 1. \quad (2.164)$$

Наконец, на оси (плоскости) симметрии канала должны выполняться условия симметрии

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial c_i}{\partial y} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (2.165)$$

Однако вследствие того, что система уравнений (2.155) — (2.162) имеет первый порядок относительно поперечной составляющей вектора скорости, для v может быть задано только одно условие — либо на стенке, либо на оси канала. Второе же условие для v используется при получении соотношения, из которого в рамках приближения узкого канала определяется продольное распределение давления $p(x)$, входящее в правую часть проекции уравнения переноса импульса на ось x (2.156). Интегрируя уравнение неразрывно-

*) Учитывая сильное влияние граничных условий на результаты решения задачи, при формулировке граничных условий на стенках в рамках приближения узкого канала иногда учитывается конечность углов наклона стенок к оси x , хотя при выводе уравнений узкого канала значение $\text{tg } \theta$ предполагается малым.

сти (2.155) по y от оси до стенки канала с использованием условия $v = 0$ при $y = 0$, $v = m_f/\rho_w$ при $y = y_w$, получим интегральное условие баланса массы в канале

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_w} \rho u y^\alpha dy = m_f y_w^\alpha,$$

которое служит для определения $p(x)$ и обеспечивает выполнение условия $v = 0$ при $y = 0$, если выполнено условие $v = m_f/\rho_w$ при $y = y_w$ (или наоборот).

Вернемся теперь к вопросу о различии приближений узкого канала и пограничного слоя, о котором говорилось в начале данного раздела.

Прежде всего это различие состоит в том, что в рамках приближения узкого канала все поле течения описывается одной системой уравнений, а не двумя (системой уравнений Прандтля (2.132) — (2.138) в пограничном слое и Эйлера — в невязком ядре потока), как это делается в рамках приближения пограничного слоя. Кроме того, система уравнений узкого канала (2.155) — (2.162) записана в декартовой (цилиндрической) системе координат, а не в системе координат, связанной с обтекаемой поверхностью, в которой сформулированы уравнения пограничного слоя. Поэтому при конечных углах наклона стенок канала к направлению основного потока эти системы, несмотря на свое внешнее сходство, не являются эквивалентными.

Указанные различия в формулировках систем уравнений пограничного слоя и узкого канала сказываются и на областях их применимости при численном моделировании реальных течений вязких газов и газовых смесей в каналах. Это обстоятельство отчетливо проявляется уже на стадии вывода этих приближенных моделей из полной системы уравнений Навье — Стокса.

Так, при выводе уравнений пограничного слоя применительно к внутренним течениям предполагается (см. п. 6.3.1), что должны выполняться условия

$$\sqrt{Re_l} \gg 1, \quad \sqrt{Re_l} \geq O(l^0/r^0),$$

а при выводе уравнений узкого канала — условия

$$Re_l \gg 1, \quad \varepsilon = r^0/l^0 \ll 1,$$

которые, очевидно, не являются эквивалентными между собой, хотя и имеют достаточно широкую область перекрытия (см. рис. 2.5), в которой обе модели должны обеспечивать практически одинаковую точность расчета.

6.3.3. Параболизированные уравнения Навье — Стокса. Эта модель является наиболее полной из параболических моделей течений вязких газов и газовых смесей. Она представляет собой дальнейшее

развитие приближения вязкого ударного слоя [205], нашедшего широкое применение при решении задач внешнего обтекания тел различной формы сверхзвуковыми газовыми потоками при умеренных числах Рейнольдса [7]. Соответствующая система уравнений получается в результате отбрасывания в уравнениях Навье — Стокса

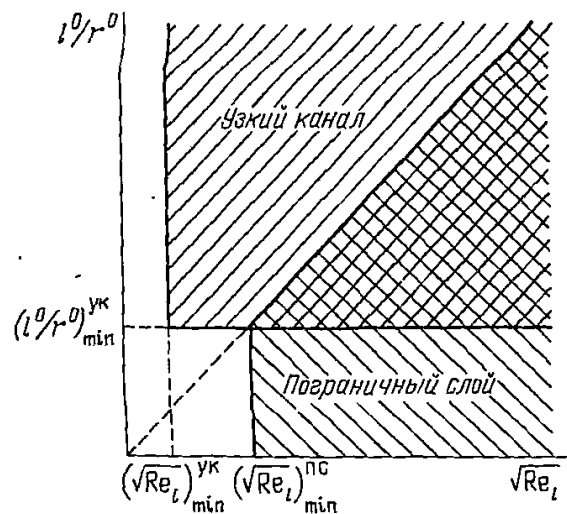


Рис. 2.5. Границы применимости приближений пограничного слоя и узкого канала по числу Рейнольдса и параметру $\varepsilon = l^0/r^0$

(2.2) — (2.9) всех вторых производных (повторных и смешанных), содержащих дифференцирование по координате, совпадающей с основным направлением течения. В отличие от высших приближений уравнений пограничного слоя, модель параболизированных уравнений Навье — Стокса является не вполне последовательной, так как в рамках этой модели учитывается лишь часть членов полной системы уравнений Навье — Стокса, имеющих порядок $O(1/\sqrt{Re_l})$, и в то же время сохранен ряд членов этой системы более высокого порядка малости [31]. Однако такая непо-

следовательность неслучайна [206] и связана с вопросами численной реализации параболизированных уравнений Навье — Стокса. Дело в том, что система уравнений, получаемая в результате отбрасывания только вторых производных по продольной координате в полной системе уравнений Навье — Стокса, допускает возможность применения маршевых методов численного интегрирования, что, собственно, и является главным вычислительным преимуществом рассматриваемых в данном разделе параболизированных моделей динамики вязких газовых смесей. С другой стороны, она описывает по крайней мере не менее широкий класс течений, чем другие более последовательные модели. Особенно эффективной модель параболизированных уравнений Навье — Стокса оказывается в том случае, когда параболизация полной системы уравнений Навье — Стокса осуществляется в криволинейной системе координат, продольное направление которой в каждой точке совпадает с локальным направлением линий тока рассматриваемого течения *).

До сравнительно недавнего времени модель параболизированных уравнений Навье — Стокса использовалась исключительно для решения стационарных задач внешнего сверхзвукового обтекания тел различной формы [7]. Это связано с тем, что применение маршевых

*) Подробнее о выборе систем координат при использовании параболизированных уравнений Навье — Стокса см. в работах С. Г. Черного [207] и В. М. Ковени, С. Г. Черного [208].

методов решения параболизированных уравнений Навье — Стокса без использования каких-либо специальных приемов возможно только в случае сверхзвуковых скоростей течения. В тех случаях, когда скорость потока в продольном (маршевом) направлении оказывается меньше локальной скорости звука, задача Коши, поставленная для параболизированной системы уравнений Навье — Стокса, является некорректной, что приводит, вообще говоря, к неустойчивости маршевых алгоритмов (см., например, работы Дэвиса, Рубина [206] и В. М. Ковени, Н. Н. Яненко [31]).

Однако в последние годы предложен ряд более или менее эффективных способов «регуляризации» этой задачи, позволяющих использовать маршевые методы не только для расчета сверхзвуковых внешних течений со сравнительно узкими дозвуковыми зонами, но и для решения внешних и внутренних задач с обширными дозвуковыми областями. Эти способы рассмотрены в следующем разделе.

6.3.4. О методах расчета внутренних течений на основе параболизированных моделей. Как уже отмечалось, принципиальное вычислительное преимущество параболических моделей течения газовых смесей состоит в возможности их реализации с помощью маршевых конечно-разностных схем, применение которых позволяет значительно сократить затраты машинного времени и памяти ЭВМ. Это преимущество приобретает особо важное значение при исследовании трехмерных течений и течений смесей, содержащих большое число компонент, когда проблема ограниченности ресурсов современных ЭВМ становится чрезвычайно острой.

Ниже кратко рассматриваются основные особенности существующих методов численного интегрирования систем дифференциальных уравнений, лежащих в основе описанных в п. 6.3.1—6.3.3 параболизированных моделей внутренних течений химически реагирующих газовых смесей. Основное внимание уделяется вопросам, связанным с применением маршевых численных алгоритмов (методы расчета процессов многокомпонентной диффузии и аппроксимации химических источников членов, являющиеся, по существу, общими для параболических и эллиптических моделей, были рассмотрены в пп. 5.3.3, 5.3.4).

Приближения пограничного слоя и узкого канала. Проанализированные в п. 6.3.2 различия в формулировке моделей пограничного слоя и узкого канала, естественно, сказываются и на вычислительных алгоритмах, с помощью которых проводится численное решение задач о течении вязких газовых смесей в рамках этих моделей [209].

Так, при использовании приближения пограничного слоя процедура вычислений состоит из двух последовательных этапов: расчета невязкого течения и расчета течения в пограничном слое. В тех случаях, когда толщина пограничного слоя, определенная в результате решения уравнений пограничного слоя, оказывается

сравнимой с поперечными размерами рассматриваемой области (такая ситуация является типичной для многих внутренних течений), необходимо учитывать обратное влияние пограничного слоя на параметры в невязком ядре потока. Это осуществляется с помощью различных модификаций стандартной итерационной процедуры по толщине вытеснения пограничного слоя [202] (см., например, работу [210]).

Алгоритмы расчета внутренних течений в рамках приближения узкого канала в силу своей однородности являются, вообще говоря, более простыми. Исключение составляет лишь решение прямой задачи теории сопла Лаваля, поскольку в этом случае возникают специфические трудности, связанные с наличием в уравнениях узкого канала особой точки типа седла и необходимостью определения критического расхода газа через сопло *).

Несмотря на указанные структурные различия алгоритмов решения внутренних задач динамики вязкого газа в рамках приближений пограничного слоя и узкого канала, конечно-разностные схемы, используемые для численного интегрирования соответствующих этим моделям дифференциальных уравнений, весьма близки между собой в силу формального сходства последних **).

При построении этих схем широко используется большой опыт, накопленный в области разработки эффективных маршевых конечно-разностных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений параболического типа для решения задач внешнего обтекания (см., например, работы [166, 217—226], а также монографии Б. В. Алексеева [227], В. М. Пасконова, В. И. Полежаева, Л. М. Чудова [87]).

Для решения внутренних задач наибольшее распространение получили неявные двухслойные конечно-разностные схемы типа схемы Кранка — Николсона, имеющие, как правило, первый порядок аппроксимации по продольной и второй или более высокий — по поперечной координате и реализуемые с помощью скалярных прогонок в сочетании с простыми итерациями или с помощью векторных прогонок в сочетании с итерациями по Ньютону. Одна схема первого типа, использовавшаяся при решении конкретных задач, рассмотренных в гл. 4 данной книги, подробно описана в § 18.

*) Различные методы преодоления этих трудностей предложены в работах Рэя [211], В. Н. Ветлущего, М. И. Мучной [212], Митры, Фибига [213] и др. (см. обзор [209]). Однако универсальные (сохраняющие работоспособность в широком диапазоне изменения определяющих параметров) алгоритмы решения прямой задачи теории сопла Лаваля в рамках приближения узкого канала, по-видимому, отсутствуют.

**) Имеются в виду собственно уравнения пограничного слоя (2.132) — (2.138); методы численного интегрирования уравнений Эйлера, описывающих течение в невязком ядре потока, подробно рассмотрены в монографиях А. А. Самарского, Ю. П. Попова [214], С. К. Годунова и др. [66], У. Г. Пирумова, Г. С. Рослякова [215], В. Л. Рождественского, Н. Н. Яценко [216].

Основное отличие конечно-разностных схем интегрирования уравнений пограничного слоя и узкого канала связано с тем, что в первом случае продольное распределение давления является, по существу, известной функцией, а во втором — должно быть определено в процессе решения. Однако в случае расчета двумерных течений это различие не является принципиальным, поскольку в настоящее время разработаны эффективные методы определения $p(x)$, пригодные для расчета как дозвуковых, так и сверхзвуковых (в интегральном смысле) режимов течения, основанные на использовании интегрального уравнения баланса массы в канале (2.166) и не нарушающие общей структуры неявных итерационных конечно-разностных схем [212, 228—230].

Дополнительные различия алгоритмов решения уравнений пограничного слоя и узкого канала проявляются также в выборе независимых и зависимых переменных, относительно которых записываются эти уравнения.

В частности, при численном интегрировании системы уравнений пограничного слоя используются различные преобразования координат, нашедшие широкое применение в классической теории пограничного слоя. К ним относятся, например, преобразования Дородницына — Липса, Крокко и Мизеса [202]. Наряду с этим применяются другие преобразования, переводящие полуограниченную в поперечном направлении расчетную область $[0, \infty)$ в ограниченную полосу $[0, 1)$ [38], а также численные преобразования координат [231], обеспечивающие сгущение конечно-разностной сетки в областях с наиболее резким изменением параметров потока (у стенки канала, в окрестности критического сечения сопла).

При интегрировании уравнений узкого канала (2.155) — (2.162) наибольшее распространение получило простейшее преобразование поперечной координаты вида $\bar{r} = r/r_w(x)$ (r_w — полувысота или радиус канала), переводящее произвольную расчетную область, ограниченную стенками канала, в полосу постоянной (единичной) ширины. В качестве зависимых переменных при этом обычно используются консервативные величины, что обеспечивает возможность построения консервативных конечно-разностных схем, позволяющих существенно повысить точность определения давления из интегральных условий баланса.

Оценивая общее состояние проблемы численного моделирования двумерных внутренних течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей на основе приближений пограничного слоя и узкого канала, можно, по-видимому, констатировать, что в настоящее время существуют достаточно эффективные методы решения соответствующих задач, которые обеспечивают возможность проведения численных исследований течений данного класса в широком диапазоне изменения определяющих параметров (см. гл. 4).

Параболизированные уравнения Навье — Стокса. В тех случаях, когда на основе данной модели исследуются нестационарные тече-

ния газовых смесей или рассчитываются стационарные потоки с помощью процесса установления во времени, методы их численного интегрирования, по существу, не отличаются от соответствующих методов решения полной системы уравнений Навье — Стокса (см., например, работы [69, 70, 232, 233]). Однако при таком подходе вычислительные преимущества параболизированных уравнений Навье — Стокса по сравнению с полными сводятся лишь к некоторому сокращению затрат на расчет вязких членов исходных уравнений, что может оказаться достаточно существенным лишь в случае записи уравнений в криволинейных неортогональных системах координат.

Специфика методов численного интегрирования параболизированных уравнений Навье — Стокса проявляется в тех случаях, когда они строятся на основе маршевых конечно-разностных схем, в принципиальной возможности использования которых и заключается, как уже отмечалось выше, основное преимущество параболических моделей течения газовых смесей.

К сожалению, численное интегрирование параболизированных уравнений Навье — Стокса с помощью маршевых методов сопряжено с преодолением значительных трудностей, связанных с неустойчивостью маршевых конечно-разностных схем в дозвуковых областях потока. Последняя обусловлена некорректностью постановки в этом случае задачи Коши по продольной (маршевой) координате x и связана с членом $\partial p / \partial x$ в проекции уравнения переноса импульса на маршевое направление, присутствие которого обеспечивает возможность распространения возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях [31, 206].

Конкретные конечно-разностные алгоритмы, используемые в настоящее время при численном интегрировании параболизированных уравнений Навье — Стокса отличаются значительным разнообразием. В целом при их рассмотрении можно отметить тенденцию к применению неявных двухслойных разностных схем, которые условно можно разделить на две основные группы.

К первой из них относятся схемы, являющиеся обобщением методов численного интегрирования уравнений пограничного слоя (неявные шеститочные разностные схемы типа Кранка — Николсона — в работах [234—239]; разностная схема, представляющая собой развитие известного численного алгоритма Патанкара и Сполдинга [225], — в работах [240—243]).

Вторую группу составляют маршевые варианты численных методов, развитых первоначально для решения полной системы нестационарных уравнений Навье — Стокса (см., например, работы [208, 240—247]).

Не касаясь деталей упомянутых конечно-разностных алгоритмов, содержащихся в оригинальных работах, остановимся более подробно на нашедших применение на практике способах обеспечения устойчивости маршевых методов решения параболизированных урав-

нений Навье — Стокса в дозвуковых областях потока, поскольку именно этот вопрос является ключевым при анализе возможности использования указанных методов для расчета внутренних течений газовых смесей.

1. Отбрасывание члена $\partial p / \partial x$ в проекции уравнения переноса импульса на ось x в дозвуковых областях. Данный способ является в достаточной мере оправданным при расчете внешнего обтекания пластины или конуса под нулевым углом атаки гиперзвуковыми потоками при высоких значениях числа Рейнольдса [206]. Применительно к внутренним химически реагирующим течениям он использовался в работе [248] при анализе смещения нерасчетных сверхзвуковых струй в резонаторе химического лазера непрерывного действия. Какие-либо оценки погрешностей, вносимых при этом в расчет, в указанной работе отсутствуют, хотя очевидно, что в общем случае сверхзвуковых химически реагирующих внутренних течений с интенсивным тепловыделением, характеризующихся значительными продольными градиентами давления, эти погрешности могут быть весьма велики.

2. Вычисление члена $\partial p / \partial x$ в уравнении для продольной составляющей импульса в предыдущей по x точке конечно-разностной сетки. До недавнего времени этот способ преодоления неустойчивости маршевых методов интегрирования параболизированных уравнений Навье — Стокса при решении задач внешнего обтекания был, по-видимому, наиболее популярным [7]. Основной его недостаток заключается в необходимости выполнения условия устойчивости, накладывающего ограничение снизу на значение шага интегрирования по маршевой координате $\Delta x \geq \Delta x_{\min}$ [206, 249], причем величина $\Delta x_{\min}$ пропорциональна толщине дозвуковой (эллиптической) области [250]. При не слишком высоких значениях чисел Рейнольдса и Маха это ограничение вступает в противоречие с требованием точности аппроксимации исходных дифференциальных уравнений. По-видимому, именно этим объясняется то обстоятельство, что при расчете внутренних течений рассматриваемый способ преодоления неустойчивости маршевых схем применения не нашел.

3. Введение в уравнение для продольной составляющей импульса дополнительных членов, обеспечивающих корректность постановки задачи Коши в дозвуковых областях. Данный способ, впервые предложенный в работах [251, 252], в дальнейшем с успехом применялся его авторами при решении широкого круга задач внешнего обтекания [31, 208, 244]. Как и предыдущий, он пока не использовался при расчете внутренних течений газовых смесей. Поэтому для течений такого типа пока отсутствуют данные, свидетельствующие о возможности подбора таких значений коэффициентов при дополнительных («регуляризирующих») членах, которые обеспечивали бы регуляризацию задачи, с одной стороны, и не приводили бы к существенному искажению характеристик потока — с другой.

4. Использование в дозвуковой области потока значений продольного градиента давления, вычисленных за ее пределами («подслойная аппроксимация» члена $\partial p/\partial x$). Данный способ достаточно широко применялся при расчете как внешних, так и внутренних (см., например, работы [235, 236, 240, 242, 243]) течений. В соответствии с двумерным анализом Дэвиса и Рубина [206] его ограниченность проявляется в том, что подслойная аппроксимация члена $\partial p/\partial x$ приводит к устойчивым алгоритмам лишь при выполнении условия

$$\int_0^{y_1} (M^2 - 1)/M^2 \left[1 - \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]_{y=0} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| dy > 0,$$

где y_1 — значение поперечной координаты, при котором определен градиент давления $\partial p/\partial x$ ($M_1 = M|_{y=y_1} > 1$). В частности, при расчете течения колебательно неравновесной смеси газов в расширяющейся части гиперзвукового сопла [235, 236] для обеспечения устойчивости счета оказалось необходимым полагать $\partial p/\partial x = \text{const}(y)$ в области с $0 \leq M \leq M_1 \approx 1,7$.

5. Введение в уравнения «псевдонестационарных» членов и отыскание стационарного решения параболизированных уравнений Навье — Стокса на каждом новом слое по маршевой координате как предела решения нестационарных уравнений при $t \rightarrow \infty$. Этот способ предложили Лин и Рубин [253] на основе интуитивных соображений о целесообразности изменения типа стационарных параболизированных уравнений Навье — Стокса в дозвуковых областях, где существенно проявляются их эллиптические свойства. Его применение, в частности, позволило авторам указанной работы впервые в рамках данной модели провести расчет дозвукового ($M = 0,6$) закрученного течения в трубе с помощью маршевого метода *)

Высокая эффективность данного способа преодоления неустойчивости маршевых схем была подтверждена в работах [245, 255] при решении задач внешнего обтекания, а также в работах [246, 254] при анализе некоторых внутренних и струйных течений. Однако, как показали П. А. Войнович и А. А. Фурсенко [256], при исследовании сверхзвуковых течений с интенсивным тепловыделением в каналах переменного сечения применение рассматриваемого метода регуляризации параболизированных уравнений Навье — Стокса не всегда приводит к успеху.

6. Использование «глобальных» итераций. По-видимому, впервые метод глобальных итераций для решения параболизированных

*) Некоторые соображения о причинах повышения устойчивости маршевых алгоритмов решения параболизированных уравнений Навье — Стокса при включении в них нестационарных членов, основанные на анализе устойчивости схемы для модельного линейного уравнения, были представлены П. А. Войновичем, Ю. П. Головачевым и А. А. Фурсенко [254].

уравнений Навье — Стокса был предложен в работах [257, 258]. В дальнейшем этот подход был развит в ряде работ, посвященных анализу дозвуковых [259—263], а также сверхзвуковых и смешанных [256, 264, 265] течений в каналах.

В рамках данного метода численное решение параболизированных уравнений Навье — Стокса осуществляется с помощью многократных «маршевых проходов» всей расчетной области, в процессе которых, наряду с интегрированием уравнений движения, поправляется поле давления, хранящееся в памяти ЭВМ на протяжении всего итерационного цикла. Возможно также чередование маршевых проходов с «эллиптическим шагом», заключающемся в определении «нового» поля p из решения эллиптического уравнения для давления [262, 266].

Метод глобальных итераций, очевидно, уже не является чисто маршевым, и с точки зрения экономичности уступает рассмотренным выше алгоритмам. Однако с его помощью удается обойти вычислительные трудности, связанные с использованием маршевых алгоритмов при расчете течений с дозвуковыми зонами, поскольку он позволяет учесть влияние распространения возмущений вверх по потоку в дозвуковых областях. Благодаря этому применение глобальных итераций позволяет значительно расширить класс течений, поддающихся изучению в рамках параболизированных уравнений Навье — Стокса. В частности, на основе данного подхода могут проводиться расчеты течений, в которых существенным образом проявляется эллиптический характер поля давления («частично параболических» течений по терминологии Пратапа и Сполдинга [258]), например, дозвуковых течений в сильно искривленных каналах [108, 257, 263]. Как показано в работах [250, 266, 267], глобальные итерационные процедуры оказываются работоспособными даже при расчете течений несжимаемой жидкости.

Судя по данным указанных выше работ, для достижения сходимости глобальных итерационных процедур решения параболизированных уравнений Навье — Стокса в большинстве случаев требуется достаточно большое количество итераций (обычно — несколько десятков), так что выигрыш в затратах машинного времени по сравнению со случаем расчета течения на основе полной системы уравнений Навье — Стокса при этом оказывается незначительным, либо может вообще отсутствовать [108]. Однако использование данного подхода в любом случае позволяет существенно сократить необходимые затраты памяти ЭВМ.

6.4. Приближенные методы описания процессов молекулярного переноса и физико-химических превращений в газовых смесях. Приведенные в гл. 1 общие выражения для векторов плотности потоков импульса, тепла и массы в многокомпонентных газовых смесях являются весьма громоздкими. При решении задач динамики вязких газовых смесей в рамках приближенных математических моделей, рассмотренных в предыдущих разделах данного параграфа, объем

вычислений, необходимых для определения этих величин, составляет значительную, а в ряде случаев — основную часть от общего объема расчетов. Поэтому стремление по возможности упростить выражения для векторов плотности потоков и коэффициентов молекулярного переноса с учетом особенностей конкретных газовых смесей и рассматриваемых условий течения является вполне естественным. Применяемые для этих целей приближенные методы, так же как и сами газовые системы, весьма разнообразны. Однако некоторые допущения, используемые в практике численного моделирования при описании процессов молекулярного переноса, носят весьма общий характер. Как уже отмечалось в гл. 1, к числу таких допущений относятся, в частности, допущения о несущественной роли переноса массы отдельных компонент смеси за счет термо- и бародиффузии (см. (1.22), (1.23)) и переноса тепла за счет диффузионного термоэффекта (третье слагаемое в (1.47)). Учет этих эффектов при численном моделировании внутренних течений газовых смесей может оказаться необходимым лишь в некоторых специальных случаях [1].

Вторая группа упрощающих допущений, касающихся определения переносных свойств газовых смесей, связана с использованием при расчете коэффициентов вязкости и теплопроводности отдельных компонентов и смеси в целом различных эмпирических и полуэмпирических соотношений вместо строгих формул молекулярно-кинетической теории. Некоторые из этих соотношений приведены в § 2 гл. 1.

В настоящее время подобный подход получил широкое применение в практике расчетов как внутренних, так и внешних течений газовых смесей. В тех случаях, когда используемые приближенные соотношения прошли достаточно надежную расчетную или экспериментальную проверку, он представляется вполне оправданным, поскольку позволяет практически без снижения точности расчетов существенно сократить затраты машинного времени.

Как отмечалось в п. 5.3.4, наиболее сложным среди вопросов, связанных с расчетом процессов молекулярного переноса в многокомпонентных газовых смесях, является вопрос об определении векторов диффузионных потоков J_i . В связи с этим широкое распространение получили различные приближенные методы описания многокомпонентной диффузии, в частности, так называемый обобщенный закон Фика (1.46).

Этот метод во многих случаях позволяет получить результаты, лишь незначительно отличающиеся от результатов, базирующихся на использовании строгих выражений (1.22), (1.23) или соотношений Стефана — Максвелла (1.39). Однако он не свободен от весьма существенных недостатков. В частности, из (1.46) следует, что сумма диффузионных потоков, определенных с помощью этих соотношений, не равна тождественно нулю. В некоторых случаях (при исследовании течений смесей с существенно различающимися диф-

фузионными свойствами компонент) это приводит к заметному нарушению интегральных условий баланса массы отдельных компонентов смеси и требует введения специальных корректирующих процедур [91], не имеющих физического обоснования.

Кроме того, согласно (1.46), диффузионный поток i -й компоненты зависит от градиента концентрации только этой компоненты, в то время как согласно (1.22), (1.23) он определяется пространственной неоднородностью концентраций всех компонент смеси.

Кроме процессов молекулярного переноса массы, импульса и энергии, в многокомпонентных газовых смесях может протекать целый ряд других физико-химических процессов (спонтанное и вынужденное излучение, химические реакции, обмен энергией между внутренними степенями свободы молекул, электромагнитные явления и др.) Однако характер протекания этих процессов в значительной степени зависит от назначения, конструктивных особенностей и режима работы конкретных технических устройств, в которых используются эти смеси. Поэтому приближенные методы описания таких процессов также существенно опираются на особенности соответствующих устройств и технологических процессов (весьма характерной в этом отношении является модель процессов в резонаторах сверхзвуковых химических лазеров, подробно рассматриваемая в гл. 5).

Тем не менее существуют две приближенные модели для описания химических реакций и процессов обмена энергией между внутренними степенями свободы молекул газа, которые могут быть сформулированы без рассмотрения специфики тех или иных конкретных технических приложений.

Речь идет о так называемых моделях химически замороженного и равновесного течений, которые уже на протяжении многих лет находят широкое применение при численном моделировании течений газовых смесей.

В основе этих моделей, являющихся по своей сути асимптотическими, лежит анализ соотношений между характерными временами конвекции, диффузии и физико-химических превращений в потоке.

Первая из них (модель замороженного течения) описывает такую предельную ситуацию, когда характерные времена всех или части химических реакций, которые протекают между компонентами смеси, а также характерные времена обмена энергией между внутренними степенями свободы молекул намного превосходят характерные времена конвекции и (или) диффузии. Иными словами, модель химически замороженного течения представляет собой предельную форму полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9) или приближенных моделей динамики вязких газовых смесей, рассмотренных в пп. 6.2, 6.3, при стремлении к нулю числа Дамкелера Da , определяемого выражением (2.17). Совершая указанный предельный переход в общем уравнении переноса массы i -й компоненты смеси (2.4), т. е. опуская источник член, со-

держаний множитель Da_s , получим следующее уравнение переноса массы i -й компоненты *) для случая замороженного течения:

$$Sh \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho v \cdot \frac{\partial c_i}{\partial r} = - \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial r} \cdot J_i. \quad (2.166)$$

Таким образом, в рамках модели химически замороженного течения описание движения многокомпонентной химически реагирующей смеси ничем не отличается от описания течений инертных смесей, что, естественно, приводит к значительному упрощению задачи численного интегрирования уравнений динамики вязкого многокомпонентного газа по сравнению с общим случаем, когда в уравнениях переноса массы компонент присутствуют сильно нелинейные источниковые члены.

Подробное описание постановки задач динамики вязких газовых смесей в рамках второй из указанных выше приближенных моделей — модели химически равновесного течения содержится в работе О. Н. Сулова, Г. А. Тирского, В. В. Щевникова [36]. Эта модель в известном смысле противоположна модели замороженного течения, поскольку предназначена для расчета течений, в которых характерные времена физико-химических превращений много меньше характерного газодинамического времени. Иными словами, модель химически равновесного течения представляет собой предельную форму общих уравнений динамики многокомпонентного вязкого газа при $Da_s \rightarrow \infty$. Для того чтобы при таком предельном переходе безразмерный химический источниковый член $\dot{w}_i = \sum_{s=1}^{N_R} Da_s \dot{w}_{is}$ в уравнениях переноса массы отдельных компонент (2.4) оставался конечным и имел такой же порядок, как и остальные члены этого уравнения, т. е. $O(1)$, необходимо (см. (2.9)), чтобы безразмерная величина $\dot{w}_s$, определяемая соотношением

$$\dot{w}_s = \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v'_{js}} - \frac{K_s}{K_{ps}} (pm)^{\sum_{j=1}^{N_h} (v''_{js} - v'_{js})} \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v''_{js}} \quad (2.167)$$

$$(s = 1, 2, \dots, N_h - N_g),$$

имела порядок $O((Da_s)^{-1})$, т. е. стремилась к 0 при $Da_s \rightarrow \infty$.

Таким образом, уравнения

$$\dot{w}_s = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, N_h - N_g) \quad (2.168)$$

или эквивалентные им условия детального химического равновесия

*) Молекулы и атомы, находящиеся в различных квантовых энергетических состояниях, могут формально рассматриваться как различные компоненты смеси, а процессы обмена энергией между ними — как элементарные химические реакции.

Гульдберга — Вааге

$$K_{ps} = K_s (pm)^{\sum_{j=1}^{N_h} (v''_{js} - v'_{js})} \prod_{j=1}^{N_h} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v''_{js} - v'_{js}} \quad (2.169)$$

в рамках модели химически равновесного течения (т. е., при $Da_s \rightarrow \infty$) являются точными алгебраическими интегралами уравнений переноса массы отдельных компонент смеси*). Число таких независимых интегралов равно $N_h - N_a$ (N_a — число химических элементов в рассматриваемой газовой смеси). Для определения концентраций остальных компонент смеси при химически равновесном течении используются N_a уравнений переноса массы отдельных химических элементов (1.87), безразмерная форма которых имеет вид

$$Sh \frac{\partial c_k^*}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_k^*}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_k^* \quad (k = 1, 2, \dots, N_a). \quad (2.170)$$

В качестве граничных условий к уравнениям (2.170) на границах расчетной области используются соответствующие линейные комбинации граничных условий к уравнениям переноса массы отдельных компонент смеси (2.4), рассмотренных в п. 5.2 § 5. Например, домножая и суммируя по i от 1 до N_h условия (2.22.4) с учетом тождества

$\sum_{i=1}^{N_h} c_{ki} \sum_{s=1}^{N_{Rw}} Da_{sw} g_{is} \equiv 0$, получим следующие граничные условия к уравнениям (2.170) на твердых стенках:

$$J_{kn}^* + \frac{Sc}{Re} m_f [c_k^* - (c_k^*)_+] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N_a). \quad (2.171)$$

Кроме условий (2.171), на твердых стенках и других границах расчетной области так же, как и в ее внутренних точках, должны выполняться условия равновесия (2.169)**).

*) Следует еще раз подчеркнуть, что при наличии равновесия ($Da_s \rightarrow \infty$) из (2.168), (2.169) не следует равенство нулю химического источника $w_i =$

$= \sum_{s=1}^{N_R} Da_s w_{is}$. Этот член уравнения переноса массы компонент (2.4) в рамках модели химически равновесного течения остается конечным, и в случае необходимости его величина может быть определена после решения задачи по известным полям скорости, температуры и концентраций из уравнения (2.4)

$$\dot{w}_i = Sh \rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_i.$$

**) В этой связи необходимо отметить, что при использовании модели химически равновесного течения условия баланса массы i -й компоненты (2.22.4) в общем случае (при конечной каталитической активности материала стенок) не могут быть удовлетворены. Это обусловлено понижением порядка системы уравнений (2.2) — (2.9) при переходе к пределу при $Da_s \rightarrow \infty$: N_h дифференциальных уравнений переноса массы компонент заменяются $N_h - N_a$ уравнениями переноса массы элементов. Для преодоления данного затруднения приходится строить специальные модели [268].

Таким образом, в рамках модели химически равновесного течения вместо N_k уравнений переноса массы отдельных компонент смеси (2.4) используются алгебраические условия детального химического равновесия ($N_k - N_o$ уравнений (2.169)) и N_o уравнений переноса массы отдельных химических элементов (2.170). Очевидно, что при этом удается обойти серьезные вычислительные проблемы, связанные с решением жестких уравнений (2.4), содержащих в случае больших значений числа Дамкелера малый параметр $(Da_s)^{-1}$ при старших производных (см. п. 5.3.3). Поэтому модель химически равновесного течения является чрезвычайно полезной для численного исследования течений смесей с быстропротекающими физико-химическими превращениями. С ее помощью в настоящее время решен ряд важных задач, связанных с расчетом течений в соплах и камерах сгорания реактивных двигателей [269] и в теплообменниках, использующих диссоциирующие теплоносители [270]. С другой стороны, во многих случаях, представляющих практический интерес, характерные времена протекания различных физико-химических превращений с участием одних и тех же компонент смеси могут существенно различаться между собой (только часть реакций протекает равновесно) и значительно изменяться в пределах расчетной области (например, при течении газовой смеси в сопле Лавала). Более того, использование модели химически равновесного течения в ряде случаев оказывается неприемлемым даже при выполнении условия $Da_s \gg 1$ для каждой из элементарных реакций во всей расчетной области. Речь идет о тех ситуациях, когда целью исследования является определение степени неравновесности тех или иных физико-химических процессов в потоке, как это имеет место, например, при анализе эффективности различных закалочных устройств или при изучении течений в соплах и резонаторах газодинамических и химических лазеров [272—274]. В связи с этим одной из важных задач вычислительной газовой динамики является построение новых приближенных моделей для описания физико-химических превращений в многокомпонентных газовых потоках, таких, например, как предложенная недавно в работе Рэмпоу и Клаутмана [104] модель частично равновесного течения. Вместе с тем при анализе внутренних течений необходимо проведение численных исследований, направленных на строгое обоснование границ применимости традиционных моделей замороженного и равновесного течений, поскольку в настоящее время они, как правило, используются лишь на основании приближенных оценок значений числа Дамкелера, обоснованность которых не всегда является очевидной.

ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ

§ 7. Введение. О проблемах моделирования турбулентных течений

Вязкие ламинарные режимы течения в трубах, каналах, пограничных слоях реализуются при малых и умеренных числах Рейнольдса, не превышающих некоторого критического значения. Так, например, течение в гладкой круглой цилиндрической трубе остается ламинарным вплоть до чисел Рейнольдса $Re_{кр} = 2300$ ($Re = u_{ср} d / \nu$, $u_{ср}$ — среднерасходная скорость, d — диаметр трубы, ν — коэффициент кинематической вязкости. Проблемам неустойчивости ламинарных течений, их перехода в турбулентные течения посвящена обширная литература. Учитывая специфический, во многом *прикладной характер* настоящей монографии, коснемся здесь главным образом лишь отдельных аспектов проблемы моделирования развитых турбулентных течений. Указанная проблема настолько широка и многопланова, что приводимые ниже оценки и соображения следует рассматривать лишь как временные ориентиры в том многообразии фактов, точек зрения, подходов, которые характерны для современного состояния теории турбулентных течений.

Если попытаться кратко охарактеризовать наиболее важные тенденции в развитии исследований турбулентности за последние 15—20 лет, то, не претендуя на безукоризненность приводимых оценок, можно указать прежде всего на значительное расширение экспериментальных исследований турбулентных течений на качественно более высоком по сравнению с 50-ми—60-ми гг. уровне, что привело к существенному углублению физических представлений о характере процессов турбулентного переноса. При этом особое внимание стало уделяться прямому анализу и непосредственным измерениям нестационарных полей. Проведение весьма трудоемких и детальных экспериментальных исследований стало возможным благодаря успехам электронного оптического приборостроения, в частности, разработке лазерных доплеровских измерителей скорости, совершенствованию программного обеспечения ЭВМ, автоматизации обработки экспериментов. В ряду экспериментальных методов вновь большое внимание уделяется методам визуализации потоков, в частности, методу водородных пузырьков, что позволило по-новому понять многие особенности турбулентных течений. Наи-

более важным результатом экспериментальных исследований явилась формулировка представлений о турбулентном движении как движении в значительной степени упорядоченном, включающем в качестве составной части когерентные (организованные) структуры. Тем не менее можно констатировать, что хотя со времени первых наблюдений когерентных структур прошло около двадцати лет, однако до сих пор представления об этих структурах не материализовались в практические инженерные методы расчета. Читателю, интересующемуся результатами экспериментальных исследований организованных структур, рекомендуем превосходный обзор Б. Дж. Контуэлла [275]. Обсуждение некоторых свойств когерентных структур в турбулентном пограничном слое будет проведено ниже в § 10.

Переходя к оценке основных тенденций в области теоретических исследований проблемы турбулентности, необходимо отметить прежде всего некоторое своеобразие этих тенденций, выражающееся на первый взгляд в известном их противопоставлении друг другу, может быть, даже взаимоисключаемости. Прежде чем сформулировать существо этих тенденций, обратимся к некоторым качественным свойствам турбулентности, приняв за основу известное определение П. Брэдшоу (1971 г.) [276]: «Турбулентность — это трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых границами течения».

С учетом достижений в качественном исследовании организованных структур указанное определение можно существенно дополнить, отметив, что в определенной части спектра движение носит когерентный (организованный) характер.

Для поддержания турбулентного характера движения необходим непрерывный подвод энергии. Роль аккумуляторов энергии из основного потока играют крупномасштабные структуры (вихри). Поглощая энергию основного потока, эти структуры оказываются сильно анизотропными, завихренными и существенно различаются от течения к течению; именно эти структуры определяют характер процессов переноса в турбулентных потоках. Основным механизмом генерации энергии турбулентности является деформация структур (вихрей), представляющая собой трехмерный процесс, поэтому все развитые турбулентные течения являются трехмерными. Посредством нелинейных взаимодействий крупномасштабные структуры передают часть своей энергии более мелким структурам и т. д. (каскадный процесс передачи энергии). На мелкомасштабных структурах осуществляется вязкая диссипация энергии, подводимой к крупномасштабным структурам. Характеристики мелкомасштабных структур оказываются слабо зависящими от индивидуальных особенностей течения (локальная изотропия) и определяются в основном количеством энергии, которую необходимо в них диссипиро-

вать. Справедливость сказанного подтверждается результатами экспериментов.

На рис. 3.1 приведены результаты измерений в различных течениях спектральной плотности энергии $E_1(k)$ пульсаций продольной составляющей скорости [277]

$$\int_0^{\infty} E_1(k) dk = \overline{u'^2}, \quad (3.1)$$

где k — волновое число, u' — продольная составляющая пульсации скорости. Для удобства по оси ординат отложена безразмерная

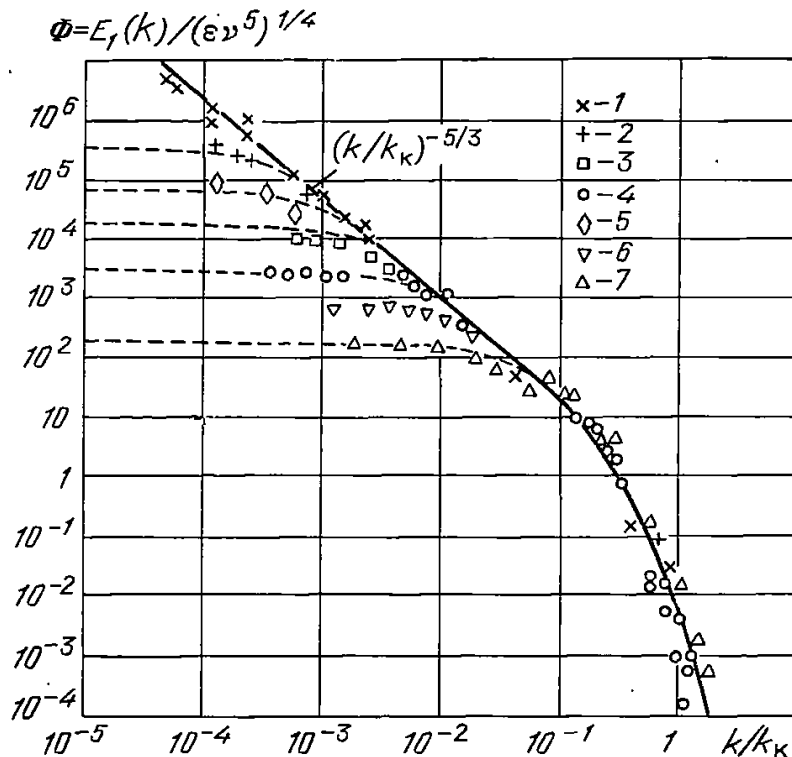


Рис. 3.1. Спектры энергии пульсаций продольных составляющих скорости для различных течений [277]: 1 — приливо-отливной канал; 2 — круглая струя; 3 — течение в трубе; 4 — течение с постоянным сдвигом; 5 — след за цилиндром; 6 — турбулентность за сеткой; 7 — пограничный слой

спектральная плотность $\Phi = E_1(k) / (\epsilon \nu^5)^{1/4}$, ϵ — местная скорость диссипации энергии на единицу массы; по оси абсцисс отложено безразмерное волновое число k/k_K , $k_K = (\epsilon/\nu^3)^{1/4}$ — волновое число Колмогорова. Масштаб Колмогорова $\eta_K = 1/k_K$ соответствует нижней границе масштабов вихрей, участвующих в процессе диссипации энергии (максимум скорости диссипации лежит при $k/k_K \simeq 0,1$). Из рис. 3.1 видно, что структура крупномасштабных вихрей (малые k) меняется в зависимости от числа Рейнольдса и типа течения, а мелкомасштабные вихри, участвующие в процессе диссипации

(большие k), являются универсальными, не зависящими от числа Рейнольдса и типа течения.

Из приведенного выше определения турбулентности, данного П. Брэдшоу, следует, что турбулентность — процесс многомасштабный. Степень многомасштабности можно оценить, соотнеся наибольший характерный масштаб течения и наименьший при больших числах Рейнольдса. Пусть L — наибольший масштаб; в случае течения в ограниченной области этот масштаб имеет порядок размеров этой области; в случае однородной турбулентности — это размер наибольших вихрей (для турбулентности за сеткой — размер ячейки); для пограничного слоя этот масштаб имеет порядок толщины слоя. Наименьшим динамически существенным масштабом течения является колмогоровский масштаб диссипации

$$\eta_K = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}. \quad (3.2)$$

Из соотношений размерности ясно, что отношение L/η_K пропорционально числу Рейнольдса в степени $3/4$, т. е.

$$L/\eta_K \sim Re_L^{3/4}. \quad (3.3)$$

Для пограничного слоя наименьшим масштабом является динамическая длина $l_v = \nu/v_*$ ($v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$, τ_w — напряжение трения на стенке, ρ — плотность); толщина вязкого подслоя, как известно [8], имеет порядок десяти длин l_v . Составляя отношение толщины слоя δ к l_v и используя для оценок известные степенные зависимости толщины слоя и коэффициента трения на плоской пластине от числа Рейнольдса [13], построенного по продольной координате x , найдем

$$Re_\delta = \frac{\delta}{\nu/v_*} = \frac{\delta}{x} \left(\frac{u_e}{v_*} \right)^{-1} \frac{u_e x}{\nu} = \frac{\delta}{x} \sqrt{\frac{c_f}{2}} Re_x, \quad (3.4)$$

$$\delta/x \sim Re_x^{-1/7}, \quad c_f \sim Re_x^{-1/7}, \quad Re_x = u_e x/\nu.$$

Окончательно отношение максимального масштаба к минимальному в пограничном слое плоской пластины оказывается пропорциональным числу Рейнольдса $Re_x^{11/14}$, т. е.

$$Re_\delta = \frac{\delta}{\nu/v_*} \sim Re_x^{11/14} \approx Re_x^{0.8}. \quad (3.5)$$

Из приведенных оценок следует, что диапазон изменения пространственных масштабов в течениях с большими числами Рейнольдса составляет несколько порядков; на плоской пластине при $Re_x = 10^5$, $Re_\delta = 10^4$.

Традиционный подход к расчету турбулентных течений основывается на идее Рейнольдса об осреднении уравнений Навье — Стокса по ансамблю тождественных течений или посредством другой эквивалентной процедуры (осреднение по времени или по простран-

ству). Полученные таким образом осредненные уравнения оказываются незамкнутыми вследствие нелинейности уравнений Навье — Стокса; замыкание осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса проводится с помощью тех или иных полуэмпирических гипотез турбулентности. Принципиальный недостаток такого подхода заключается в том, что осреднение осуществляется сразу по всем масштабам турбулентности и, следовательно, моделирование на основе полуэмпирических гипотез по необходимости проводится одновременно по всему спектру разномасштабных структур. Если учесть, что крупномасштабные структуры существенно различны для разных течений (рис. 3.1), то становится очевидной бесплодность и бесперспективность попыток создания универсальных полуэмпирических моделей турбулентности, пригодных для описания произвольных, разнотипных турбулентных течений.

Тем не менее, несмотря на постепенное осознание этого теперь уже достаточно очевидного обстоятельства, и в этом проявилась одна из главных тенденций развития теории турбулентности в 70-х и начале 80-х гг., для указанного периода характерно интенсивное развитие полуэмпирических моделей турбулентности, в особенности многопараметрических моделей, основывающихся на уравнениях для старших моментов (подробный обзор исследований в этой области теории турбулентности применительно к внутренним течениям будет дан в § 14).

В качестве альтернативного подхода, и это вторая основная тенденция в теории турбулентности, в этот же период интенсивно развивались методы прямого численного моделирования турбулентных течений на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса. Основными стимулами для развития указанного подхода были быстрый рост ресурсов памяти и быстродействия ЭВМ и отмеченный выше «хропический» недостаток традиционного метода Рейнольдса. Первые работы такого рода появились в середине 60-х гг., однако сравнительно долгое время казалось, что эти методы не имеют будущего вследствие очень больших затрат машинного времени. Для пессимизма имелись и ныне имеются простые и очевидные основания, связанные с указанной выше большой величиной отношения наибольших характерных масштабов течения к наименьшим при высоких числах Рейнольдса (3.3), (3.5).

Поскольку диапазон изменения пространственных масштабов, которые необходимо точно разрешить при расчете течения с числом Re_L , равен по порядку величины в соответствии с (3.3)

$$L/\eta_K \sim Re_L^{3/4},$$

то полное число пространственных степеней свободы имеет порядок

$$(L/\eta_K)^3 \sim Re_L^{9/4}$$

Для того чтобы результаты расчета на основе нестационарных трехмерных уравнений Навье — Стокса были пригодны для опреде-

ления средних величин, расчеты должны продолжаться в течение промежутка времени порядка L/U (U — характерная скорость), а шаг по времени не должен превышать η_k/U , так что для расчета одного варианта необходимо выполнить L/η_k шагов по времени. Следовательно, суммарное число шагов по времени и по пространству имеет порядок $Re_L^{3/4} \cdot Re_L^{9/4} \simeq Re_L^3$. Если принять в качестве оценки времени расчета и обработки на ЭВМ на одну степень свободы 10^{-4} с, то для расчета течения при $Re_L = 10^4$ потребуется 10^8 с (около трех лет), а при $Re_L = 10^6$ требующееся время оказывается близким к 10^{14} с (или $3 \cdot 10^6$ лет). Сделанные оценки, по-видимому, не оставляют надежды на успешное моделирование турбулентных течений при больших числах Рейнольдса даже в отдаленном будущем с учетом перспектив развития ресурсов ЭВМ [277].

Тем не менее на этом пути удалось получить ряд интересных результатов [278—283]. Обзор зарубежных результатов по прямому численному моделированию турбулентных течений содержится в работах [284—285]. Из существенных результатов, полученных в этой области исследований, следует отметить моделирование однородной изотропной турбулентности при умеренных числах Рейнольдса, моделирование инерционной подобласти спектра двухмерной турбулентности и энергосодержащей области спектра трехмерной турбулентности.

К числу важных и интересных результатов численного моделирования турбулентности относится установление различий между двумерной и трехмерной турбулентностью: в первом случае каскадный процесс передачи энергии осуществляется вверх по шкале волновых чисел, т. е. в направлении к более крупным вихрям, а во втором — в обратном направлении, т. е. от крупных вихрей (структур) к более мелким [286].

Оценивая возможности методов прямого численного моделирования турбулентных течений на основе нестационарных трехмерных уравнений Навье — Стокса, следует признать, что современный уровень развития ЭВМ обеспечивает возможность моделирования некоторых типов турбулентных течений при числах Рейнольдса, меньших 10^4 .

Естественная ограниченность методов прямого моделирования турбулентных течений послужила стимулом для развития другого направления вычислительной гидроаэродинамики, получившего наименование метода численного моделирования крупномасштабных структур (вихрей). Основная идея метода заключается в математическом разделении крупных и мелких структур посредством той или иной операции. Чаще всего в качестве такой операции используется операция фильтрации [285], согласно которой поле крупномасштабных пульсаций величины f определяется уравнением

$$\bar{f}(r) = \int_V G(r, r') f(r') dV, \quad (3.6)$$

где $G(r, r')$ — функция фильтра с характерным масштабом длины (шириной) Δ ; интегрирование в правой части (3.6) осуществляется по объему V .

Различные группы исследователей использовали разные виды функций фильтрации G . В частности, в работах Дирдорфа [288—290] использовался так называемый «ящичный» фильтр

$$G(r, r') = \begin{cases} 1 & \text{при } |x_i - x'_i| < \Delta/2, \\ 0 & \text{в остальном пространстве.} \end{cases} \quad (3.7)$$

В работах стэнфордской группы [287] использовался так называемый гауссов фильтр

$$G(r, r') = \left(\frac{6}{\pi \Delta^2} \right)^{3/2} \exp[-6(r - r')^2 / \Delta^2]. \quad (3.8)$$

Обзор исследований по моделированию крупномасштабных структур, проведенных до 1977 г., содержится в работе [287]. Здесь же ограничимся, следуя [287], лишь перечислением некоторых важных результатов, полученных в рамках этого подхода, и оценкой его перспектив.

Возвращаясь к операции фильтрации, например, с помощью «ящичного» фильтра (3.7), нетрудно видеть, что эта операция означает, что в качестве среднего значения функции $\bar{f}$ в точке r берется среднее значение этой функции по объему параллелепипеда с гранями Δ . Очевидно, что чем больше объем осреднения Δ^3 , тем больше теряется информации о процессах с масштабами, меньшими Δ . Иными словами, операция фильтрации означает, по существу, операцию сглаживания, и чем больше ширина фильтра, тем больше потери информации по мелкомасштабным процессам.

Операция осреднения с фильтром приводит к уравнениям, содержащим, как обычно, средние значения произведения скоростей $u_i u_j$. Универсальный метод рассмотрения этого члена является прямым аналогом метода Рейнольдса для уравнений, осредненных во времени. Иными словами, так называемая актуальная величина представляется в виде суммы

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i, \quad (3.9)$$

где $\bar{u}_i$ — осредненная скорость крупномасштабных пульсаций, а u'_i — скорость мелкомасштабных пульсаций.

После подстановки $u_i = \bar{u}_i + u'_i$ в $\overline{u_i u_j}$ получим

$$\overline{u_i u_j} = \overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\bar{u}_i u'_j} + \overline{\bar{u}'_i \bar{u}_j} + \overline{u'_i u'_j}. \quad (3.10)$$

Последние три члена содержат скорость мелкомасштабных пульсаций u'_i или u'_j , следовательно, их нужно моделировать. Было показано [287], что второй и третий члены в правой части (3.10) могут быть выражены через осредненные скорости $\bar{u}_i$ и их производные

по координатам, однако член $\overline{u_i u_j}$, характеризующий влияние мелкомасштабных вихрей на эволюцию крупномасштабных вихрей, необходимо моделировать. Приемы, используемые при моделировании тензора напряжений $\overline{u_i u_j}$, во многом адекватны известным приемам построения полуэмпирических моделей для замыкания уравнений Рейнольдса. В частности, в первых работах широко использовались модели для турбулентной вязкости. При этом, однако, оказалось, что качество моделирования во многом определяется шириной фильтра. Попытки моделирования на основе уравнений переноса для $\overline{u_i u_j}$, т. е. на основе уравнений для старших моментов, также успехом не увенчались [287].

Накопленный опыт моделирования крупномасштабных структур в турбулентных потоках, по-видимому, дает основания считать, что некоторые свойства турбулентных течений можно изучать при не слишком высоких числах Рейнольдса, в частности, в задачах о затухании турбулентности. Второй вывод, по-видимому, заключается в том, что некоторые свойства турбулентных течений, обусловленные крупномасштабным движением, остаются почти неизменными, если для мелкомасштабного движения используются довольно грубые модели. Первый вывод дает надежду на целесообразность в отдельных случаях прямого численного решения уравнений переноса. Второй открывает некоторые перспективы для моделирования крупномасштабных движений.

О возможностях крупномасштабного моделирования можно судить по перечню рассмотренных в рамках этого метода задач [287]: течение в канале; течение в прямоугольной пространственной области; исследование корреляций давления с производными скорости для течения в канале; радиальное перемешивание течения в вертикальном канале под действием сил плавучести.

Еще один важный вывод из опыта крупномасштабного моделирования заключается, по-видимому, в том, что вклад мелкомасштабных структур, т. е. структур с масштабами, меньшими шага сетки, в перенос энергии и количества движения должен быть адекватен их реальному вкладу в общий баланс. Выполнение этого требования практически оказывается задачей чрезвычайно сложной, поскольку реальные масштабы областей с различной структурой (крупные и мелкие структуры) могут существенно меняться в рамках одного течения. Например, при рассмотрении течений в пограничном слое поперечные размеры внутренней пристеночной области могут под действием сильных продольных перепадов давления меняться по меньшей мере на порядок: если на пластине толщина внутренней области составляет около 20 % от толщины слоя, то в окрестности точки отрыва эта область практически вырождается. Поскольку сам масштаб внутренней области определяется характером взаимодействия крупномасштабных структур с мелкомасштаб-

ными, то очевидно, что требования к описанию тех и других структур, в частности, к ширине фильтра, оказываются довольно жесткими, нередко заранее неизвестными.

Помимо указанных трудностей принципиального характера, возникающих при прямом численном моделировании крупномасштабных структур, весьма ограничивающих возможности указанного подхода, существуют и трудности численной реализации метода. Подробное обсуждение этих трудностей содержится в работе О. М. Белоцерковского [291], посвященной прямому численному моделированию свободной развитой турбулентности на основе дискретной диссипативной модели, полученной из нестационарных уравнений Эйлера осреднением по объему и временному интервалу. Обсуждение многих аспектов численного моделирования турбулентности можно найти в известной монографии того же автора [30].

Приведенный краткий обзор некоторых основных идей прямого численного моделирования турбулентности и моделирования крупномасштабных структур, по-видимому, позволяет сделать вывод о том, что возможности прямого моделирования турбулентности на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса в настоящее время ограничены не слишком большими числами Рейнольдса, меньшими 10^4 . Опыт, накопленный при численном моделировании крупномасштабной турбулентности для пристенных, в том числе внутренних течений, не позволяет сделать обоснованных выводов о практических преимуществах этого подхода перед традиционным методом Рейнольдса. Многие проблемы, возникшие при крупномасштабном моделировании, еще только обозначены и нуждаются в детальном анализе, прежде чем указанный подход найдет широкое применение для решения сложных практических задач. В упоминавшейся выше работе Д. Чепмена [277] отмечается, что «исследование и разработка методов численного моделирования турбулентности с помощью полных нестационарных уравнений Навье — Стокса в настоящее время только начинается». Эта оценка, относящаяся к 1979 г., представляется вполне оправданной и ныне.

В этих условиях, как и прежде, практической основой моделирования и описания турбулентных течений были и остаются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса. В пользу такого вывода свидетельствует обширный опыт по описанию турбулентных течений различного типа, накопленный в рамках этого традиционного подхода. Учитывая и негативные стороны накопленного опыта, можно, по-видимому, сказать, что попытки создания универсального метода расчета по меньшей мере иллюзорны; задача состоит главным образом в установлении границ применимости той или иной модели турбулентности при описании течений различного типа. Так или иначе противопоставление рассмотренных выше подходов к моделированию турбулентных течений представляется противостественным и не конструктивным. В заключение отметим, что

подробный обзор результатов исследований турбулентных внутренних течений химически реагирующих и нереагирующих газовых смесей на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье — Стокса и их модификаций будет дан ниже в § 14.

§ 8. Способы описания турбулентных течений: осреднение по Рейнольдсу, осреднение по Фавру

В турбулентных потоках поля скоростей, давлений, температур, концентраций и других газодинамических величин имеют весьма сложную структуру. Сложность структуры этих полей обусловлена в целом нерегулярным и случайным характером их изменения в пространстве и во времени. Открытие в турбулентных течениях «организованных» когерентных структур прояснило лишь некоторые качественные стороны сложного механизма турбулентности, методы же количественного анализа в своей принципиальной основе по существу остались неизменными. Все подходы к описанию турбулентных течений, рассмотренные в § 7, в том числе прямое моделирование турбулентности, прямое моделирование крупномасштабных структур и так называемый моментный подход (метод Рейнольдса), в конечном счете базируются на нестационарных, трехмерных уравнениях динамики вязкого газа (система уравнений Навье — Стокса).

Фундаментальным основанием для использования этих уравнений служит то обстоятельство, что пространственно-временные масштабы турбулентности всегда существенно превосходят пространственно-временные масштабы молекулярных движений (подробно этот вопрос рассматривался в § 7).

Другой важной характерной деталью, присущей всем перечисленным подходам, является статистическое осреднение, проводимое на том или ином этапе постановки задачи или ее решения.

При прямом моделировании турбулентности на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса статистическое осреднение проводится после интегрирования этих уравнений, и основная цель этапа осреднения заключается в представлении результатов удобной традиционной для практического анализа форме.

Для моментного подхода Рейнольдса характерно статистическое осреднение на начальном этапе постановки задачи. В этом случае уравнения динамики вязкого газа в начале статистически осредняются, а затем после этапа полуэмпирического «замыкания» интегрируются. Поскольку осреднение проводится по всем масштабам одновременно, все методы, базирующиеся на моментном подходе Рейнольдса, оказываются по необходимости ограниченными, неуниверсальными, пригодными для анализа лишь узких классов гидродинамических явлений.

При прямом моделировании крупномасштабных турбулентных структур статистическое осреднение проводится на этапе постанов-

ки задачи, однако охватывает не все масштабы. В этом случае возникает необходимость полуэмпирического моделирования турбулентности лишь на «подсеточных» масштабах (масштабах явлений, меньших, чем, например, размеры «статистической» ячейки).

Не повторяя оценок возможностей каждого из указанных подходов, приведенных в § 7, отметим главное: практической основой моделирования и описания турбулентных течений были и остаются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье — Стокса. Суть осреднения по Рейнольдсу подробно описана в литературе [293], поэтому мы лишь вкратце напомним их сущность [294]. Согласно Рейнольдсу значения всех газодинамических величин в турбулентном потоке представляются в виде суммы осредненных и пульсационных составляющих. Для определения средних значений той или иной величины Рейнольдс предложил применять осреднение по некоторому интервалу времени (временное осреднение). Отметим, что, наряду с указанным способом осреднения, возможны и широко применяются другие, в частности, рассмотренное в § 7 осреднение по определенной области (объему) в указанный момент времени (пространственное осреднение) или осреднение для большого числа полей, изменяющихся как от точки к точке, так и от одного момента времени к другому (статистическое осреднение по ансамблю). Не обсуждая здесь преимущества и недостатки различных способов осреднения, отметим лишь, что применяемые обычно приборы позволяют измерять средние во времени значения величин, поэтому практически наиболее целесообразным чаще других оказывается временное осреднение *).

Следуя Рейнольдсу, представим мгновенное значение каждой из неизвестных величин или их любой комбинации в виде суммы осредненной $\bar{f}$ и пульсационной f' составляющих

$$f = \bar{f} + f'. \quad (3.11)$$

Под осреднением будем понимать временное осреднение

$$\bar{f} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt, \quad (3.12)$$

причем интервал осреднения Δt предполагается достаточно большим по сравнению с характерным периодом пульсационного поля и существенно малым по сравнению с периодом осредненного поля. Если осредненное поле является стационарным, т. е. его период бесконечно велик, то среднее значение величины f будет

*) Подробное обсуждение вопроса о способах вычисления средних значений в теории турбулентности можно найти в упоминавшейся выше монографии А. С. Монина и А. М. Яглома [293]. Проблеме пространственного осреднения в теории турбулентности посвящена работа В. Н. Николаевского [295].

выражаться равенством

$$\bar{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f dt \right]. \quad (3.13)$$

Как указывается в классической работе Рейнольдса [294], в процессе любого осреднения (не только временного) необходимо требовать выполнения следующих соотношений, получивших название условий Рейнольдса:

$$\begin{aligned} 1) \quad \overline{f+g} &= \bar{f} + \bar{g}; \\ 2) \quad \overline{af} &= a\bar{f}, \quad \text{если } a = \text{const}; \\ 3) \quad \bar{a} &= a, \quad \text{если } a = \text{const}; \\ 4) \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \bar{\frac{\partial f}{\partial s}}, \quad \text{где } s \text{ — это } x, y, z \text{ или } t; \\ 5) \quad \overline{fg} &= \bar{f}\bar{g}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Полагая в соотношениях (3.14) последовательно $g=1$, $g=\bar{h}$ и $g=h'-\bar{h}$ (штрихом здесь и далее обозначены пульсационные составляющие величин), получим следующие важные следствия из условий Рейнольдса:

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{f'} = \overline{f - \bar{f}} = 0, \quad \overline{f\bar{h}} = \bar{f}\bar{h}, \quad \overline{f'h'} = \bar{f}\bar{h}' = 0. \quad (3.15)$$

Используя эти следствия, установим полезные для дальнейшего правила осреднения произведений двух и трех переменных величин

$$\overline{fg} = \overline{(f + f')(g + g')} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}, \quad (3.16)$$

$$\overline{fgh} = \bar{f}\bar{g}\bar{h} + \overline{f'g'h'} + \overline{g\bar{f}'h'} + \overline{h\bar{f}'g'} + \overline{f'g'h'}. \quad (3.17)$$

Пульсационная составляющая произведения двух переменных величин, очевидно, равна

$$\begin{aligned} (fg)' &= fg - \overline{fg} = (f' + \bar{f})(g' + \bar{g}) - \bar{f}\bar{g} = \\ &= \bar{f}\bar{g} + f'\bar{g} + \bar{f}g' + f'g' - \bar{f}\bar{g} - \bar{f}'g' = f'\bar{g} + \bar{f}g' + f'g' - \overline{f'g'}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Наряду с изложенным классическим способом осреднения по Рейнольдсу, предложенным его автором применительно к течениям несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), при описании турбулентных течений сжимаемого газа более предпочтительным оказывается другой способ осреднения, при котором для плотности и давления газа применяется осреднение по Рейнольдсу (временное осреднение), а для других параметров потока вводятся их так называемые средневзвешенные значения. Указанный комбинированный метод осреднения, именуемый методом средневзвешенных параметров, иногда называют также осреднением по Фавру.

Согласно методу средневзвешенных параметров осредненная скорость вводится соотношением

$$\tilde{v}_j = \overline{\rho v_j} / \bar{\rho}. \quad (3.19)$$

Здесь прямая черта сверху по-прежнему означает временное осреднение (3.12).

Аналогично выражаются осредненные энтальпия, полная энтальпия, температура и концентрация

$$\tilde{h} = \overline{\rho h} / \bar{\rho}, \quad \tilde{H} = \overline{\rho H} / \bar{\rho}, \quad \tilde{T} = \overline{\rho T} / \bar{\rho}, \quad \tilde{c}_i = \overline{\rho c_i} / \bar{\rho}. \quad (3.20)$$

Мгновенные значения параметров представляются, так же как в методе Рейнольдса, в виде сумм осредненных и пульсационных величин:

$$\begin{aligned} v_j &= \tilde{v}_j + v_j'', & h &= \tilde{h} + h'', & H &= \tilde{H} + H'', \\ T &= \tilde{T} + T'', & c_i &= \tilde{c}_i + c_i''. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Здесь $v_j'', h'' \dots$ и т. д. — пульсации скорости, энтальпии и т. д., наложенные на средневзвешенные параметры.

Имея в виду первое из равенств (3.21), найдем

$$\rho v_j = (\bar{\rho} + \rho')(\tilde{v}_j + v_j'') = \bar{\rho}\tilde{v}_j + \rho'\tilde{v}_j + \bar{\rho}v_j'' + \rho'v_j''.$$

Осредняя произведение ρv_j по времени в соответствии с равенством (3.12), получим

$$\overline{\rho v_j} = \bar{\rho}\tilde{v}_j + \overline{\rho'\tilde{v}_j} + \overline{\rho v_j''}.$$

Второй член в правой части полученного соотношения равен нулю, поскольку равно нулю среднее значение пульсации плотности ($\overline{\rho'} = 0$). Левая часть того же соотношения равна первому члену справа, что следует из определения $\tilde{v}_j$ (3.19). Таким образом, имеем

$$\overline{\rho v_j''} = 0. \quad (3.22)$$

Аналогично нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\overline{\rho h''} = \overline{\rho H''} = \overline{\rho T''} = \overline{\rho c_i''} = 0. \quad (3.23)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что средние значения пульсационных величин, обозначенных двумя штрихами, не равны нулю, т. е.

$$\overline{v_j''} \neq 0, \quad \overline{h''} \neq 0, \quad \overline{T''} \neq 0 \text{ и т. д.}$$

Приведем полезные для дальнейшего соотношения для полной энтальпии

$$H = h + \frac{1}{2} v_j v_j, \quad \rho H = \rho h + \frac{1}{2} \rho v_j v_j. \quad (3.24)$$

Преобразуем второе из равенств (3.24) к виду

$$\rho H = \rho h + \frac{1}{2} \rho (\tilde{v}_j + v_j'') (\tilde{v}_j + v_j'') = \rho h + \frac{1}{2} \rho \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \rho v_j'' \tilde{v}_j + \frac{1}{2} \rho v_j'' v_j''.$$

Производя временное осреднение этого равенства и учитывая соотношения (3.22) и (3.20), получим

$$\tilde{H} = \tilde{h} + \frac{1}{2} \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \frac{1}{2} \overline{\rho v_j'' v_j''} / \bar{\rho}. \quad (3.25)$$

Замечая, кроме того, что

$$\begin{aligned} H = \tilde{H} + H'' &= \tilde{h} + h'' + \frac{1}{2} (\tilde{v}_j + v_j'')^2 = \\ &= \tilde{h} + h'' + \frac{1}{2} \tilde{v}_j \tilde{v}_j + \tilde{v}_j v_j'' + \frac{1}{2} v_j' v_j'', \end{aligned}$$

и вычитая из полученного равенства предыдущее, найдем выражение для пульсационной составляющей полной энтальпии:

$$H'' = h'' + \tilde{v}_j v_j'' + \frac{1}{2} v_j'' v_j'' - \frac{1}{2} \overline{\rho v_j'' v_j''} / \bar{\rho}. \quad (3.26)$$

Для давления удобнее сохранить общепринятое временное осреднение по соотношению (3.12), поскольку в опытах давление измеряется непосредственно.

Нетрудно установить связь между величинами, полученными путем осреднения двумя рассмотренными способами. Так, используя равенство (3.22), найдем

$$\overline{\rho v_j''} = \overline{(\bar{\rho} + \rho') v_j''} = 0,$$

или иначе

$$\overline{v_j''} = - \overline{\rho' v_j''} / \bar{\rho}.$$

Осредняя по времени первое из равенств (3.21), получим с учетом предыдущего

$$\tilde{v}_j - \bar{v}_j = - \overline{v_j''} = \overline{\rho' v_j''} / \bar{\rho}. \quad (3.27)$$

С другой стороны, умножая соотношение

$$v_j = \tilde{v}_j + v_j'' = \bar{v}_j + v_j'$$

на ρ и производя временное осреднение, будем иметь

$$\overline{\rho \tilde{v}_j} + \overline{\rho v_j''} = \overline{\rho \bar{v}_j} + \overline{\rho v_j'}.$$

Вследствие того, что $\overline{\rho v_j''} = 0$ в соответствии с соотношением (3.22), найдем

$$\tilde{v}_j - \bar{v}_j = \overline{\rho v_j'} / \bar{\rho} = \overline{(\bar{\rho} + \rho') v_j'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' v_j'} / \bar{\rho}. \quad (3.28)$$

Таким образом, на основании (3.27) и (3.28) имеем

$$\tilde{v}_j - \bar{v}_j = \overline{\rho' v'_j} / \bar{\rho} = \overline{\rho' v''_j} / \bar{\rho}. \quad (3.29)$$

Аналогично можно показать, что

$$\tilde{T} - \bar{T} = T' - T'' = \overline{\rho' T'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' T''} / \bar{\rho}, \quad (3.30)$$

$$\tilde{h} - \bar{h} = \overline{\rho' h'} / \bar{\rho} = \overline{\rho' h''} / \bar{\rho}. \quad (3.31)$$

Равенства (3.29) — (3.31) показывают, что различия между средними значениями величин, полученными двумя рассмотренными способами осреднения, определяются корреляциями этих величин с плотностью, т. е. выражениями вида $\overline{\rho' v'_j}$, $\overline{\rho' v''_j}$, $\overline{\rho' T'}$, $\overline{\rho' T''}$ и т. д. Очевидно, что в несжимаемой жидкости метод средневзвешенных параметров вырождается в классический метод Рейнольдса. Учитывая установленную выше однозначную связь между полученными каждым из методов осредненными и пульсационными величинами (равенства (3.29) — (3.30) и т. д.), можно заметить, что вопрос выбора того или иного способа осреднения может быть решен из соображений удобства.

§ 9. Уравнения турбулентного движения многокомпонентных реагирующих газовых смесей

При рассмотрении турбулентных течений в средах с переменной плотностью осреднение по методу средневзвешенных величин (по Фавру) оказывается более удобным, чем осреднение по Рейнольдсу. Преимущества первого метода перед вторым классическим проявляется главным образом в том, что система уравнений турбулентного движения, полученная осреднением по Фавру, оказывается существенно более компактной по сравнению с системой уравнений, полученной осреднением по Рейнольдсу (сопоставление обеих форм уравнений было проведено в монографии [8]). Естественно, никаких преимуществ в решении проблемы замыкания уравнений турбулентного движения ни один из способов осреднения не дает. Поэтому, исходя из соображений удобства, ограничимся выводом уравнений турбулентного движения по методу средневзвешенных величин. При этом воспользуемся системой уравнений переноса вязкого, теплопроводного, многокомпонентного реагирующего газа, записанных в тензорной форме (1.79) — (1.84).

Следуя установившейся терминологии, будем называть уравнениями для первых моментов уравнения для осредненных параметров потока: v , ρ , c_i , h (или T). Уравнения для корреляционных моментов (вторых — кинетической энергии турбулентности, турбулентных напряжений и т. д.) будем называть уравнениями для старших моментов (вторых и т. д.).

Далее перейдем к выводу уравнений турбулентного движения для первых моментов.

9.1. Уравнения для первых моментов. Применяя операцию осреднения (3.12) к уравнению неразрывности для смеси (1.79) и предполагая возможность перестановки этой операции с дифференцированием по координатам и по времени (четвертое из условий Рейнольдса (3.14)), получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} v_j) = 0. \quad (3.32)$$

Используя определение осредненной скорости как отношения среднего массового расхода к средней плотности, т. е. соотношение (3.19), получим из уравнения (3.32) уравнение неразрывности для смеси

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0. \quad (3.33)$$

Осредняя по (3.12) уравнение неразрывности для i -й компоненты (1.80), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} c_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} v_j c_i) = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} \bar{J}_{ij}. \quad (3.34)$$

В левой части уравнения (3.34) вместо c_i и v_j подставим их значения из равенств (3.21). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{\rho} (\tilde{c}_i + c_i'') + \frac{\partial}{\partial s_j} \bar{\rho} (\tilde{v}_j + v_j'') (\tilde{c}_i + c_i'') = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} \bar{J}_{ij}.$$

Используя соотношения (3.22) — (3.23), преобразуем предыдущее уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{c}_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{c}_i) = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{J}_{ij} + \bar{\rho} v_j'' c_i''). \quad (3.35)$$

Пренебрегая корреляционными моментами третьего порядка $(\bar{\rho}' v_j'' c_i'')$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{c}_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{c}_i) = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{J}_{ij} + \bar{\rho} v_j'' c_i''). \quad (3.36)$$

Относительно существа операции осреднения массовой скорости образования i -й компоненты w_i заметим, что при выводе уравнения неразрывности i -й компоненты эта операция была фактически лишь обозначена. Вопрос о влиянии турбулентности на скорость химических реакций и способах осреднения величины w_i будет рассмотрен ниже.

Производя операцию осреднения (3.12) над уравнением количества движения (1.82), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} v_j v_k) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial s_j} + \bar{\rho} g_k. \quad (3.37)$$

Используя соотношения (3.19), (3.22) — (3.23), приведем уравнение (3.37) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{v}_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j \tilde{v}_k) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) + \bar{\rho} g_k.$$

Переходя в предыдущем уравнении от дивергентной формы к обычной с помощью уравнения неразрывности (3.33), получим

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) + \bar{\rho} g_k. \quad (3.38)$$

Если заменить в предпоследнем члене уравнения (3.38) плотность ρ в соответствии с равенством $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ и пренебречь корреляционным моментом третьего порядка $(\rho' v_j'' v_k'')$, то уравнение движения (3.38) примет вид, совпадающий по форме с уравнением движения несжимаемой жидкости

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \overline{\rho v_j'' v_k''}) + \bar{\rho} g_k. \quad (3.39)$$

Далее рассмотрим уравнение переноса энергии в форме (1.84). Подставим в это уравнение вместо v_j и h их выражения из (3.21); для давления p , как это было принято, сохраним обычное представление $p = \bar{p} + p'$. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{h} + \rho h'') + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{v}_j + \rho h'' \tilde{v}_j + \rho v_j'' \tilde{h} + \rho v_j'' h'') = \\ = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} + p') + (\tilde{v}_k + v_k'') \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{p} + p') + \tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - \frac{\partial q_j}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Производя в этом уравнении осреднение по времени в соответствии с соотношением (2.2) и принимая во внимание соотношения (3.22) — (3.23), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{v}_j) = \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \overline{v_k'' \frac{\partial p'}{\partial s_j}} + \overline{\tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j}} - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{q}_j + \overline{\rho v_j'' h''}). \end{aligned} \quad (3.41)$$

В многокомпонентной смеси $h = \sum_{i=1}^{N_k} c_i h_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{h}'' = \sum_{i=1}^{N_k} (c_i h_i)'' = \\ = \sum_{i=1}^{N_k} (c_i h_i - \tilde{c}_i \tilde{h}_i) = \sum_{i=1}^{N_k} [(\tilde{c}_j + c_i'') (\tilde{h}_i + h_i'') - \tilde{c}_i \tilde{h}_i] = \\ = \sum_{i=1}^{N_k} (\tilde{c}_i \tilde{h}_i + c_i'' \tilde{h}_i + \tilde{c}_i \tilde{h}_i'' + c_i'' h_i'' - \tilde{c}_i \tilde{h}_i). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Подставляя соотношение (3.42) в последний член уравнения (3.41), получим с учетом (3.23) и с точностью до членов, содержащих тройные корреляции,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{h}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{h} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_j}} + \\ + \overline{\tau_{jk} \frac{\partial v_k}{\partial s_j}} - \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\bar{q}_j + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i \overline{\rho v_j'' c_i''} + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{c}_i \overline{\rho v_j'' h_i''} \right). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Осредненная энтальпия смеси $\tilde{h}$ с точностью до членов, содержащих тройные корреляции, имеет вид

$$\tilde{h} = \sum_{i=1}^{N_k} (\tilde{c}_i \tilde{h}_i + \overline{c_i'' h_i''}). \quad (3.44)$$

Аналогичным образом можно получить из уравнения (1.83) уравнение переноса энергии, записанное через полную энтальпию H ($H = h + v_k^2/2$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{v}_j) = \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_k \tau_{kj}} - \bar{q}_j) - \frac{\partial}{\partial s_j} \overline{\rho H'' v_j''} + \bar{\rho} \tilde{v}_j g_j. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Используя выражение для пульсации полной энтальпии (3.26) и пренебрегая корреляционными моментами третьего порядка, приведем уравнение (3.45) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_k \tau_{kj}} - \bar{q}_j) - \\ - \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{\rho v_j'' h''} + \overline{\rho v_k v_k'' v_j''}) + \bar{\rho} \tilde{v}_j g_j. \end{aligned} \quad (3.46)$$

В уравнении (3.46) заменим пульсацию энтальпии h'' в соответствии с равенством (3.42). Опуская простые преобразования, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \tilde{H}) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{H} \tilde{v}_j) = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_k \tau_{kj}} - \bar{q}_j) - \\ - \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\overline{\rho v_k v_k'' v_j''} + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i \overline{\rho v_j'' c_i''} + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{c}_i \overline{\rho v_j'' h_i''} \right) + \bar{\rho} \tilde{v}_j g_j. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Подставляя в левую часть уравнения (3.47) вместо $\tilde{H}$ выражение (3.25) и возвращаясь от дивергентной формы уравнения к обычной с помощью уравнения неразрывности (3.32), получим с

учетом уравнения движения (3.39)

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_j} = & \\ = \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} - \frac{\partial \bar{q}_j}{\partial s_j} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_k \tau_{kj}}) - \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{\tau}_{jk}}{\partial s_j} - & \\ - \frac{\overline{\tilde{v}_k v_j}}{\bar{\rho} \tilde{v}_k v_j} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} - \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i \overline{\tilde{\rho} v_j c_i} + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{c}_i \overline{\tilde{\rho} v_j h_i} \right) - & \\ - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \overline{\tilde{\rho} v_j^2} \right) - \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\tilde{v}_j \frac{1}{2} \overline{\tilde{\rho} v_j^2} \right). \quad (3.48) \end{aligned}$$

Уравнение (3.48) представляет собой уравнение переноса энергии в осредненном турбулентном движении, записанное с точностью до третьих пульсационных моментов. В этом уравнении член $-\frac{\overline{\tilde{v}_k v_j}}{\bar{\rho} \tilde{v}_k v_j} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j}$ определяет скорость превращения энергии осредненного движения в энергию турбулентности в результате действия рейнольдсовых напряжений $-\overline{\tilde{\rho} v_k v_j}$. Член $\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i \overline{\tilde{\rho} v_j c_i}$ описывает перенос энергии за счет турбулентного переноса массы (турбулентной диффузии); член $\sum_{i=1}^{N_k} \tilde{c}_i \overline{\tilde{\rho} v_j h_i}$ выражает перенос энергии за счет турбулентной теплопроводности. Интерпретация остальных членов уравнения (3.48) трудностей также не составляет. Первые два члена справа описывают мощность сил давления и их работу. Третий, четвертый и пятый члены связаны с молекулярными процессами переноса тепла и количества движения; эти члены являются существенными в окрестности твердых стенок. Последние два члена правой части уравнения (3.48) связаны с кинетической энергией турбулентности; как правило, вклад этих членов в энергию осредненного течения невелик, и ими пренебрегают.

Далее проведем осреднение уравнения состояния (1.76). С точностью до третьих моментов получим

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \sum_{i=1}^{N_k} \frac{\tilde{c}_i}{m_i} \left(1 + \frac{\overline{T'' c_i}}{\tilde{T} \tilde{c}_i} \right). \quad (3.49)$$

Уравнения (3.32), (3.36), (3.39), (3.47) (или (3.48)), (3.49) составляют систему уравнений осредненного турбулентного движения многокомпонентной реагирующей смеси газов. Система получена с точностью до корреляционных моментов третьего порядка на основе метода средневзвешенных величин (осреднение по Фавру). Незамкнутость системы обусловлена наличием корреляцион-

ных моментов второго порядка для пульсационных величин: v_j'' , c_i'' , h_i'' . Отметим, что принятый способ осреднения позволил исключить из уравнений переноса пульсации плотности.

Для удобства соберем все уравнения вместе:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0, \quad (3.50)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{\tau}_{jk} - \bar{\rho} \overline{v_j'' v_k''}) + \bar{\rho} g_k, \quad (3.51)$$

$$\bar{\rho} \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{c}_i}{\partial s_j} = \bar{w}_i - \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{J}_{ij} + \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''}), \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{H}}{\partial s_j} = & \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\bar{v}_k \bar{\tau}_{jk} + \tilde{v}_k \bar{\rho} \overline{v_k'' v_j''}) - \\ & - \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\bar{q}_j + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''} + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{c}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' h_i''} \right) + \bar{\rho} \tilde{v}_j g_j. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Вместо уравнения (3.53) в ряде случаев удобно использовать уравнение (3.48), в котором опущены последние два члена, связанные с кинетической энергией турбулентности, а также объединены четвертый и пятый член справа, что может привести к погрешности лишь в областях взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса. Совершая упомянутые упрощения, будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t} + \bar{\rho} \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_j} = \\ = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \tilde{v}_k \frac{\partial \bar{p}}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\bar{\tau}_{jk} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} - \bar{\rho} \overline{v_k'' v_j''} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial s_j} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\bar{q}_j + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''} + \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{c}_i \bar{\rho} \overline{v_j'' h_i''} \right). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Введем для удобства обозначения:

для тензора турбулентных напряжений

$$\tau_{jk}^T = - \bar{\rho} \overline{v_j'' v_k''}; \quad (3.55)$$

для турбулентного потока массы i -й компоненты в направлении оси j

$$J_{ij}^T = \bar{\rho} \overline{v_j'' c_i''}; \quad (3.56)$$

для турбулентного потока энергии (тепла) в направлении оси j

$$q_j^T = \sum_{i=1}^{N_k} \bar{\rho} (\tilde{h}_i \overline{v_j'' c_i''} + \tilde{c}_i \overline{v_j'' h_i''}); \quad (3.57)$$

кроме того, введем в рассмотрение полные тензор напряжений — τ_{jh}^Σ , поток массы J_{ij}^Σ , тепловой поток $-q_j^\Sigma$, определив эти величины равенствами

$$\tau_{jh}^\Sigma = \tau_{jh} + \tau_{jh}^T, \quad (3.58)$$

$$J_{ij}^\Sigma = J_{ij} + J_{ij}^T, \quad (3.59)$$

$$q_j^\Sigma = q_j + q_j^T. \quad (3.60)$$

Опуская в дальнейшем для удобства знаки статистического осреднения в системе уравнений (3.50) — (3.53), с учетом введенных равенствами (3.55) — (3.60) соотношений запишем систему уравнений турбулентного движения многокомпонентной реагирующей газовой смеси в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j) = 0, \quad (3.61)$$

$$\rho \frac{\partial v_k}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_k}{\partial s_j} = -\frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial \tau_{jh}^\Sigma}{\partial s_j}, \quad (3.62)$$

$$\rho \frac{\partial c_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial c_i}{\partial s_j} = w_i - \frac{\partial J_{ij}^\Sigma}{\partial s_j}, \quad (3.63)$$

$$\rho \frac{\partial H}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial H}{\partial s_j} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_k \tau_{jh}^\Sigma) - \frac{\partial}{\partial s_j} q_j^\Sigma + \rho v_j g_j. \quad (3.64)$$

Уравнение (3.54) после аналогичных преобразований примет вид

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial h}{\partial s_j} = -\frac{\partial p}{\partial t} + v_k \frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\tau_{jh}^\Sigma \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - q_j^\Sigma \right). \quad (3.65)$$

Оценка второго члена в правой части уравнения состояния (3.49) в общем случае затруднительна; чаще всего этим членом пренебрегают по сравнению с единицей; в последнем случае это уравнение приобретает форму

$$p = \rho R T \sum_{i=1}^{N_k} \frac{c_i}{m_i}. \quad (3.66)$$

Уравнения (3.61) — (3.63), (3.64) (или (3.65)), (3.66) составляют систему уравнений для первых моментов. Эти уравнения, нередко именуемые в отечественной литературе уравнениями Рейнольдса, а в зарубежной — осредненными по Рейнольдсу (Фавру) уравнениями Навье — Стокса, как отмечалось выше, являются незамкнутыми, поскольку содержат неопределенные моменты второго порядка τ_{jh}^T , J_{ij}^T , q_j^T (3.55) — (3.57).

Для замыкания уравнений Рейнольдса необходимо привлекать те или иные полуэмпирические гипотезы относительно связи вто-

рых моментов (3.55) — (3.57) с осредненными параметрами течения. Гипотезы, непосредственно связывающие вторые моменты с осредненными характеристиками течения, принято называть алгебраическими (подробно эти гипотезы будут рассмотрены в § 11). Нередко же для определения вторых моментов используются дифференциальные уравнения, получившие наименование уравнений для вторых моментов, такие, например, как уравнение кинетической энергии турбулентности, уравнения переноса рейнольдсовых напряжений и некоторые другие. Ниже приводится вывод некоторых из этих уравнений.

9.2. Уравнения для вторых моментов. Умножим уравнение движения (1.82) на v_i (индекс i здесь и далее в этом разделе эквивалентен индексам j и k и не означает, как это было принято ранее, номер компоненты)

$$v_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j v_k) \right] = v_i \left[-\frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} \right] + \rho g_k v_i. \quad (3.67)$$

Поменяем местами индексы i и k в равенстве (3.67)

$$v_k \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j v_i) \right] = v_k \left[-\frac{\partial p}{\partial s_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial s_j} \right] + \rho g_i v_k. \quad (3.68)$$

Суммируя равенства (3.67) и (3.68) и совершая простые преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j v_k) = & -v_i \frac{\partial p}{\partial s_k} - v_k \frac{\partial p}{\partial s_i} + \\ & + v_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} + v_k \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial s_j} + \rho (g_k v_i + g_i v_k). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Разлагая мгновенные значения скоростей в уравнении (3.69) на средние и пульсационные составляющие: $v_i = \bar{v}_i + \bar{v}_i''$, $v_j = \bar{v}_j + \bar{v}_j''$, $v_k = \bar{v}_k + \bar{v}_k''$, а также представляя τ_{jk} в виде $\tau_{jk} = \bar{\tau}_{jk} + \bar{\tau}_{jk}'$ и производя осреднение по времени, будем иметь с учетом равенства (3.55)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_k - \tau_{ik}) + \\ + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j v_k - v_i \tau_{jk} - v_j \tau_{ik} - v_k \tau_{ij} + \overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) = \\ = -v_i \frac{\partial p}{\partial s_k} - \bar{v}_i'' \frac{\partial p}{\partial s_k} - v_k \frac{\partial p}{\partial s_i} - \bar{v}_k'' \frac{\partial p}{\partial s_i} + v_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial s_j} + v_k \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial s_j} + \\ + \bar{v}_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j} + \bar{v}_k'' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial s_j} + g_k \rho v_i + g_i \rho v_k. \end{aligned} \quad (3.70)$$

В уравнении (3.70) для упрощения записи знак осреднения сохра-

нен лишь в пульсационных членах. Кроме того, опущены третьи моменты, содержащие пульсации плотности $\overline{\rho'v_j''v_k''}$.

Далее обратимся к осредненному уравнению переноса количества движения (3.39). Записав это уравнение в дивергентной форме, умножим его на $\tilde{v}_i$. Опуская, как и в уравнении (3.70), знак осреднения, будем иметь с учетом равенства (3.55)

$$v_i \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_j v_k) \right] = v_i \left[-\frac{\partial p}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{jk} + \tau_{jk}^T) \right] + g_k \rho v_i. \quad (3.71)$$

Меняя местами индексы i и k в уравнении (3.71) и суммируя полученное уравнение с (3.71), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i v_k) + \frac{\partial}{\partial s_j} (\rho v_i v_j v_k) = & -v_i \frac{\partial p}{\partial s_k} - v_k \frac{\partial p}{\partial s_i} + \\ & + v_i \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{jk} + \tau_{jk}^T) + v_k \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{ji} + \tau_{ji}^T) + g_k \rho v_i + g_i \rho v_k. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Полагая в уравнении (3.72) $i = k$, приведем это уравнение к форме так называемого уравнения кинетической энергии осредненного движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i \right) + \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{1}{2} \rho v_i v_i v_j \right) = -v_i \frac{\partial p}{\partial s_i} + v_i \frac{\partial}{\partial s_j} (\tau_{ji} + \tau_{ji}^T) + \rho g_i v_i. \quad (3.73)$$

Далее возвращаясь к уравнению (3.70), вычтем из него уравнение (3.72). В итоге получим уравнение переноса турбулентных касательных напряжений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ik}^T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_j \tau_{ik}^T) = & \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{\rho v_i'' v_j'' v_k''}) + \\ & + \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_i}} + \overline{v_i'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} - \overline{v_i'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} - \overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{ji}'}{\partial s_j}} - \tau_{jk}^T \frac{\partial v_i}{\partial s_j} - \tau_{ji}^T \frac{\partial v_k}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Уравнение для тензора напряжений Рейнольдса (3.74) содержит, кроме тензора турбулентных напряжений τ_{ik}^T (равенство (3.55)), неизвестные члены в правой части (первый — пятый), непосредственно не выражающиеся через напряжение Рейнольдса. Таким образом, для его замыкания необходимы полуэмпирические модели турбулентности.

В частном случае, когда $i = k$, уравнение (3.74) переходит в уравнение баланса турбулентной энергии или, иначе, в уравнение кинетической энергии турбулентности

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_j k) = -\frac{\partial}{\partial s_j} \overline{v_j'' k'} - \overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} + \overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} + \tau_{jk}^T \frac{\partial v_k}{\partial s_j}. \quad (3.75)$$

Здесь

$$k = \frac{1}{2} \overline{\rho v_k'' v_k''}, \quad k' = \frac{1}{2} \rho v_k'' v_k'' \quad (3.76)$$

— кинетическая энергия турбулентности и ее пульсация соответственно.

Третий член в правой части уравнения (3.75) можно представить в виде

$$\overline{v_k'' \frac{\partial \tau_{jk}'}{\partial s_j}} = \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_k'' \tau_{jk}'}) - \tau_{jk}' \frac{\partial v_k''}{\partial s_j}. \quad (3.77)$$

Аналогичное преобразование можно осуществить со вторым членом правой части того же уравнения

$$\overline{v_k'' \frac{\partial p}{\partial s_k}} = \frac{\partial}{\partial s_k} (\overline{v_k'' p}) - p \frac{\partial v_k''}{\partial s_k}. \quad (3.78)$$

Подставляя (3.77) и (3.78) в (3.75), приведем уравнение переноса турбулентной энергии к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_j k) = \frac{\partial}{\partial s_j} (-\overline{v_j k'} - \overline{v_k p} + \overline{v_k \tau_{jk}'}) + \\ + p \frac{\partial v_k''}{\partial s_k} - \tau_{jk}' \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} + \tau_{jk}^T \frac{\partial v_k}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

В уравнении (3.75) первый член слева характеризует изменение кинетической энергии турбулентности во времени, второй — конвективный перенос той же субстанции, т. е. перенос энергии турбулентности осредненным течением. Первый член в правой части уравнения (3.75) выражает диффузионный перенос энергии турбулентности за счет пульсаций скорости, второй — работу сил давления в пульсационном движении, третий — работу вязких напряжений в пульсационном движении, четвертый — взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движения.

Интерпретацию отдельных членов уравнения переноса турбулентных напряжений (3.74) можно провести, сравнивая каждый из этих членов с соответствующими членами уравнения переноса кинетической энергии турбулентности (3.75).

Кроме рассмотренных выше уравнений переноса для k и τ_{jk}^T применяются и иные уравнения, в частности, уравнения переноса турбулентной вязкости, масштаба турбулентности, скорости диссипации и т. д. По-видимому, чаще других при расчетах внутренних течений, помимо уравнения кинетической энергии турбулентности (3.78), используется уравнение для скорости диссипации

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \left(\frac{\partial v_k''}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j''}{\partial s_k} \right)^2. \quad (3.80)$$

Вкратце процедура получения уравнения для скорости диссипации сводится к дифференцированию проекции уравнения Навье — Стокса на ось s_k по переменной s_j , умножению полученного резуль-

тата на $\partial v_k / \partial s_j$ и последующему осреднению. Получающееся таким образом уравнение в случае течения несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса, когда превалирует локальная изотропность, имеет вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_j} = - \frac{\partial}{\partial s_j} (\overline{v_j \varepsilon'}) - 2 \overline{\left(v \frac{\partial^2 v_i''}{\partial s_j^2} \right)^2} - 2v \frac{\partial v_i''}{\partial s_k} \frac{\partial v_i''}{\partial s_j} \frac{\partial v_k''}{\partial s_j}, \quad (3.81)$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial v_k''}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j''}{\partial s_k} \right)^2. \quad (3.82)$$

Здесь ε' — пульсация скорости диссипации.

Члены в правой части уравнения 3.81 характеризуют соответственно — диффузионный перенос скорости диссипации (первый член), генерацию за счет растяжения вихревых трубок и вязкую диссипацию (второй член). Отметим, что в случае течения жидкости с постоянной плотностью пульсационные величины, используемые при осреднении по Рейнольдсу (обозначены с одним штрихом) и по Фавру (с двумя штрихами), совпадают ($v_k' = v_k''$) (см. § 8), и, следовательно, уравнение (3.81) справедливо при любом способе осреднения.

Уравнение для ε , так же как и полученные выше уравнения для тензора напряжений Рейнольдса и кинетической энергии турбулентности, является незамкнутым. Моделированию отдельных членов этих уравнений для течений несжимаемой жидкости посвящена обширная литература [296—300]. Более подробно вопросы моделирования турбулентных течений на основе уравнений для вторых моментов применительно к внутренним течениям будут рассмотрены в последующих параграфах настоящей главы.

§ 10. Уравнения турбулентного пограничного слоя в многокомпонентном реагирующем газе

10.1. Общие соображения. Использование полной системы уравнений турбулентного движения (3.61) — (3.66) сопряжено со значительными трудностями и принципиального (проблема замыкания) и вычислительного характера. В ряде случаев эта система уравнений может быть упрощена без ущерба для точности описания. Наиболее существенные упрощения достигаются при описании течений в тонких пограничных слоях, образующихся на стенках каналов (входной участок) или на поверхностях тел при их движении в газовой среде. Получающиеся в результате упрощения уравнений системы (3.61) — (3.66) уравнения пограничного слоя оказываются полезными не только при описании течений в собственно пограничных слоях, но и при описании течений в каналах в рамках рассмотренного в гл. 2 приближения узкого канала. При этом необходимо сразу же подчеркнуть, что указанное упрощение,

т. е. вывод уравнений турбулентного пограничного слоя, не может быть достаточно строго теоретически обоснован.

Методологические трудности, возникающие при выводе уравнений турбулентного пограничного слоя из уравнений Рейнольдса, обусловлены прежде всего незамкнутостью этих уравнений. Многомасштабность процессов турбулентного переноса в пограничных слоях, отсутствие надежных данных об определяющих процессы переноса в различных зонах слоя масштабах явлений и зависимости этих масштабов, т. е. пространственных размеров различных зон и характерных для этих зон скоростей от числа Рейнольдса и других параметров подобия, не позволяют применить при выводе уравнений турбулентного пограничного слоя строгие асимптотические методы.

В связи с проблемой получения уравнений пограничного слоя из уравнений Рейнольдса представляется нелишним проследить эволюцию взглядов на структуру турбулентного пограничного слоя в историческом аспекте, тем более что некоторые классические схемы еще могут быть, на наш взгляд, использованы с достаточной эффективностью для решения широкого круга новых задач, в которых не столько важна точность конечного численного результата, сколько оценка основных тенденций и суммарных эффектов.

10.2. О структуре турбулентных пограничных слоев. Исторически первое, по-видимому, указание на «двухслойность» течения в турбулентном пограничном слое было сделано Прандтлем в работе, относящейся к 1910 г., т. е. сравнительно задолго до формулировки первой полуэмпирической гипотезы турбулентности (гипотезы пути смещения) в 1925 г. Согласно представлениям Прандтля вся область течения делилась на две дискретные области: ламинарный (вязкий в современной терминологии) подслой и турбулентное ядро; между этими областями предполагалась резкая граница (производные от продольной скорости по поперечной координате терпят разрыв). Подобные же воззрения были высказаны несколько позднее в 1919 г. Тейлором [301]. Последующие экспериментальные исследования различных авторов в значительной степени подтвердили обоснованность двухслойной прандтлевской схемы. При этом, однако, выяснилось, что резкой границы между вязким подслоем и турбулентным ядром в действительности не существует. Как видно из рис. 3.2, на котором представлены в переменных закона стенки ($\varphi = u/v_*$, $\eta = yv_*/\nu$, $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$) опытные данные Никурадзе по профилям скорости, переход от чисто вязкого течения ($\eta = \varphi$) к турбулентному ($\varphi = 5,5 + 5,75 \lg \eta$) происходит непрерывно. Жизнеспособность двухслойной схемы Прандтля, согласно которой вязкий подслой занимал область пограничного слоя, непосредственно прилегающую к стенке и ограниченную координатами

$$0 \leq \eta \leq \eta_\pi, \quad \eta_\pi = 12,$$

а турбулентному ядру отводилась вся остальная часть пограничного

слоя $\eta \geq \eta_*$, была подтверждена многочисленными последующими расчетами сопротивления на основе простейших полуэмпирических гипотез турбулентности (гипотез Прандтля — Кармана).

Однако, наряду с успешными результатами, были отмечены и неудачи. Если результаты расчетов интегральных динамических характеристик, таких как коэффициенты сопротивления тел простейшей формы, интегральных толщин пограничного слоя, оказывались, как правило, удовлетворительными, за исключением предотрывных и некоторых других типов течений, то расчет тепловых характеристик в трубах, на пластине для жидкостей с числами Прандтля, заметно превышающими единицу, привел к большим погрешностям в оценке коэффициентов теплоотдачи.

Последующие исследования убедительно показали, что причина неудач в применении двухслойной схемы к расчету тепловых характеристик заключена в неучете взаимодействия процессов молекулярного и турбулентного переноса на стыке двух областей. Предложенная Карманом в 1934 г. трехслойная схема пограничного слоя допускала существование между вязким подслоем и турбулентным ядром переходной (буферной) области. Использование более гладкого, чем в прандтлевской схеме, профиля скорости позволило существенно расширить диапазон чисел Прандтля, в котором расчет тепловых характеристик хорошо согласовывался с опытными данными. В дальнейшем в работах Л. Г. Лойцянского и ряда других советских ученых была предложена эффективная теория тепло- и массообмена в турбулентных потоках при очень больших числах Прандтля и Шмидта (§ 119 книги Л. Г. Лойцянского [13]).

Возвращаясь к оценке роли и значения классической двухслойной прандтлевской схемы, уместно отметить, что при расчетах сопротивления в несжимаемой жидкости в рамках тех или иных простейших полуэмпирических гипотез турбулентности, было возможно, и это использовалось во многих методах, «игнорировать» существование вязкого подслоя. Причина «нечувствительности» интегральных методов расчета к учету или неучету вязкого подслоя заключалась в том, что в несжимаемой жидкости эта область обыч-

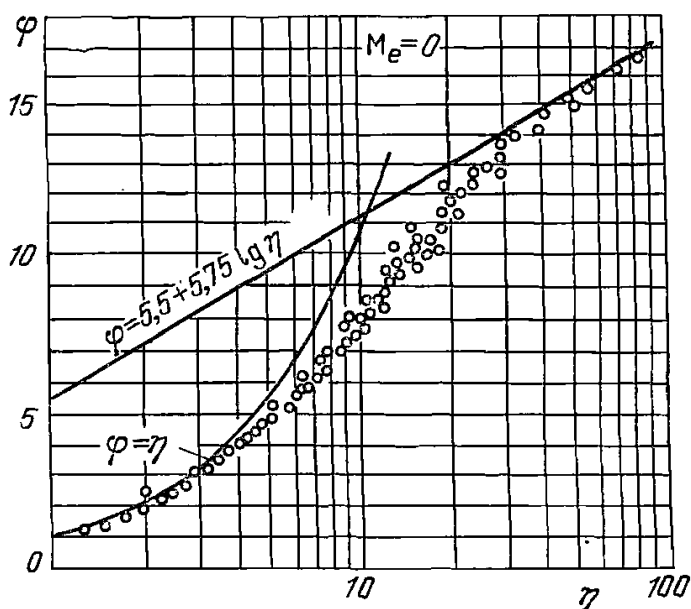


Рис. 3.2. Профиль скоростей в турбулентном пограничном слое

но занимает не более 1 % толщины слоя; ясно, что в таких условиях при расчете интегральных характеристик слоя в целом неточность в описании процессов переноса количества движения оказывалась несущественной. Однако при расчетах тепло- и массообмена эта, хотя и относительно тонкая, область играет большую роль, и детальное описание процессов переноса в ней оказывается, как правило, необходимым.

Современные представления о структуре пристеночной части турбулентного пограничного слоя по существу мало чем отличаются от представлений, положенных в основу трехслойной кармановской схемы (речь идет,

конечно, не о способах описания процессов переноса в этих областях, а о представлениях физических).

Согласно сложившимся в последние годы представлениям турбулентный пограничный слой включает по меньшей мере пять областей: вязкий подслой, переходная буферная область, область логарифмического профиля скоростей, область закона следа и область пе-

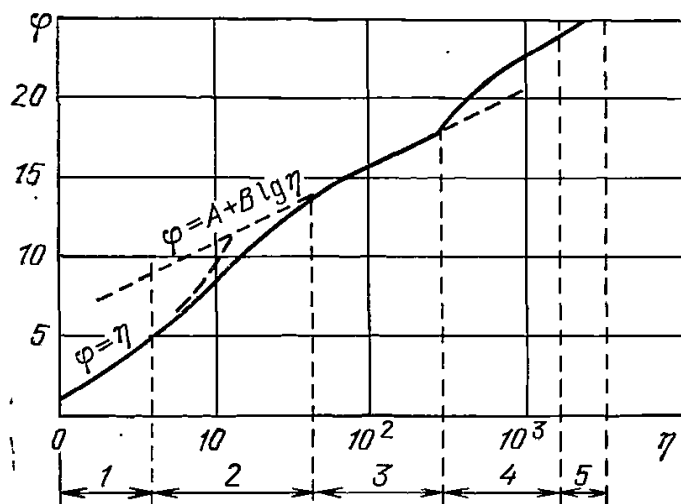


Рис. 3.3. Структура турбулентного пограничного слоя на плоской пластине

ремежаемости (надслой). Схематически эти области показаны на рис. 3.3; протяженность областей на этом рисунке примерно соответствует структуре пограничного слоя на плоской пластине в несжимаемой жидкости.

Если измерять протяженность каждой из указанных областей переменной закона стенки ($\eta = yv_*/\nu$, $v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$), то для течения на плоской пластине каждая из областей лежит примерно в следующих пределах.

Вязкий подслой (область 1 на рис. 3.3): $0 \leq \eta \leq 5 \div 7$; в этой области профиль скоростей выражается линейной зависимостью

$$\Phi = \eta \quad (\Phi = u/v_*). \quad (3.83)$$

Переходная (буферная) область (область 2, рис. 3.3): $5 \div 7 \leq \eta \leq 30 \div 40$. Профиль скорости описывается формулой

$$\eta = \Phi + e^{-\kappa\Phi} \left[e^{\kappa\Phi} - 1 - \kappa\Phi - \frac{1}{2}(\kappa\Phi)^2 - \frac{1}{6}(\kappa\Phi)^3 \right], \quad (3.84)$$

здесь $\kappa = 0,4$, $c = 5,0$ — эмпирические постоянные.

Формула (3.84) переходит в формулу (3.83) на границе вязкого подслоя и переходной области.

Область логарифмического профиля скоростей (область 3): $30 \leq \eta \leq 10^2 \div 10^3$. Профиль скоростей имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + c. \quad (3.85)$$

Область закона следа (область 4) и область перемежаемости (область 5): $10^2 \div 10^3 \leq \eta \leq \eta_\delta$. Иногда для описания профиля скоростей в областях 3 и 4 применяют эмпирическую формулу Коулса [303]

$$\varphi = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + c + \frac{\Pi(x)}{\kappa} 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\eta}{\eta_\delta} \right). \quad (3.86)$$

Значения функции $\Pi(x)$ определяются градиентом давления. При $dp/dx = 0$ $\Pi = 0,62$.

Приведенные соотношения для профиля скорости в различных областях турбулентного пограничного слоя обладают свойством универсальности, т. е. независимости от градиента давления, шероховатости, числа Рейнольдса. Однако эта универсальность «устойчиво» себя проявляет лишь при умеренных продольных перепадах давления. При больших продольных перепадах давления может возникнуть отрыв пограничного слоя ($dp/dx > 0$) или имеет место явление обратного перехода турбулентного режима течения в ламинарный (реламинизация при $dp/dx < 0$). В этом случае границы областей могут существенно измениться, вплоть до исчезновения некоторых из них и, следовательно, универсальность приведенных соотношений не будет иметь места.

Первые три области (вязкий подслой, переходная область и область логарифмического профиля скоростей) обычно принято объединять в одну внутреннюю область, иногда также называемую областью закона стенки. Внутренняя область занимает в пограничном слое на плоской пластине примерно 20 % от толщины всего слоя. В этой области, как об этом свидетельствуют измерения, вырабатывается (генерируется) около 80 % энергии турбулентности. На рис. 3.4 приведены результаты измерений скорости генерации турбулентной энергии в пограничном слое плоской пластины, полученные в опытах Клебана [304]. Из рисунка видно, что пик рассматриваемой величины имеет место на внешней границе вязкого подслоя. Аналогичный результат был получен Лауффером при измерениях течения в трубе [305]. Интегрирование по толщине пограничного слоя показывает, что первые 5 % толщины пограничного слоя дают более половины вклада в полное производство турбулентной энергии. Этот результат является чрезвычайно

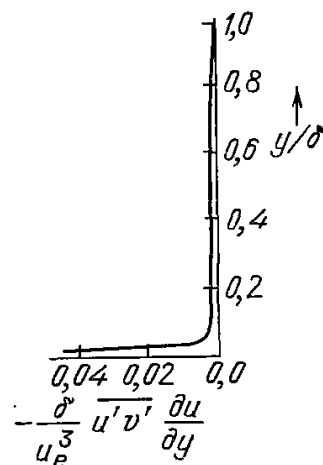


Рис. 3.4. Изменение безразмерной скорости генерации турбулентной энергии по толщине слоя

важным для понимания процессов переноса в пограничном слое при больших продольных перепадах давления (подробно этот вопрос будет рассмотрен в § 12).

Характерными масштабами скорости и длины во внутренней области являются динамическая скорость v_* и динамическая длина ν/v_* . Сущность закона стенки проявляется прежде всего в упомянутой выше универсальности профиля скорости. Профили скорости во внутренней области, построенные в переменных закона стенки ($\varphi = u/v_*$, $\eta = yv_*/\nu$, равенства (3.83) — (3.85))

$$\varphi = \varphi(\eta), \quad (3.87)$$

оказываются малочувствительными к изменению внешних условий, т. е. к влиянию продольного перепада давления, турбулентности внешнего потока и других возмущений. Это выражается в том, что профили скоростей в форме (3.87), полученные для различных чисел Рейнольдса, различных благоприятных и неблагоприятных перепадов давления и т. д., будучи нанесенными на один график, ложатся практически на одну кривую.

Факт существования закона стенки во внутренней пристеночной области пограничного слоя обусловлен характерной для этой области квазиизотропностью мелкомасштабной турбулентности (большие значения волновых чисел на рис. 3.1). Классические опыты Клаузера [306] по исследованию затухания возмущения, возникшего на различных расстояниях от стенки в турбулентном слое, показали, что внутренняя область обладает «короткой памятью» [307], т. е. затухание возмущений происходит на «коротких» расстояниях порядка нескольких толщин пограничного слоя. Почти полное отсутствие «памяти» у внутренней области и, как следствие этого, существование закона стенки можно отнести, по-видимому, к фундаментальным свойствам турбулентного пограничного слоя. Закон стенки очень широко использовался и продолжает использоваться при построении приближенных интегральных методов расчета; на его основе предложены эффективные численные методы интегрирования уравнений пограничного слоя [308].

Область закона следа и область перемежаемости (рис. 3.3) объединяют обычно в единую область, называемую внешней. Внешняя область по протяженности занимает в пограничном слое на пластине примерно 80 % толщины слоя; масштабом скорости здесь является скорость на внешней границе пограничного слоя, в качестве линейного масштаба можно принять толщину пограничного слоя. Профили скорости во внешней области напоминают по форме струйные профили; отсюда произошло название области закона следа.

Внешняя область с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью обладает «долгой памятью» [307], т. е. для полного восстановления от возмущения требуются в общем случае расстояния, во много раз превышающие масштаб турбулентности,

в качестве которого для грубых оценок можно принять толщину пограничного слоя. Это значит, что свойства течения во внешней области могут в большой степени зависеть от предыстории течения и в меньшей степени от локальных характеристик потока.

Приведенные качественные соображения о свойствах течения в различных областях турбулентного пограничного слоя получили детальное подтверждение в процессе исследования когерентных (организованных) структур в пограничных слоях [275]. Исследования пограничного слоя с использованием визуализации потока, проводимые с конца 50-х годов [309], позволили обнаружить некоторые важные особенности течения в пристеночной зоне турбулентного пограничного слоя. Визуализация течения посредством проволочки с пузырьками водорода, помещенной параллельно стенке на разных расстояниях от нее, показала, что даже в тех случаях, когда проволочка находилась глубоко в вязком подслое при $\eta = 2,7$, пузырьки, медленно перемещаясь вдоль пластины, двигались не по прямым траекториям, а образовывали чередующиеся области с большими и малыми скоростями, называемые жгутами. Взаимодействие жгутов с выше лежащими областями течения последовательно проходит через четыре этапа: образование, подъем, внезапные колебания и разрушение. Последовательность трех этапов от подъема до разрушения принято называть всплеском. Было обнаружено, что благоприятный перепад давления ($dp/dx < 0$) стремится уменьшить частоту всплесков, а неблагоприятный перепад давления стремится увеличить частоту и интенсивность всплесков.

Можно предполагать, что явление всплеска является главным в производстве энергии турбулентности и что оно во многом определяет процессы переноса между внутренней и внешними областями пограничного слоя, играя важную роль в формировании структуры всего пограничного слоя. Использование визуализации течения совместно с измерениями характеристик потока термоанемометром [309] позволило оценить различные масштабы движения, связанные со жгутами и всплесками. На основе данных визуальных наблюдений средний масштаб жгутов поперек потока (λ_z) для гладкой стенки и различных градиентов давления оценивается величиной $\lambda_z \nu_*/\nu = 100$ (рис. 3.5).

Последовательность событий, связанных с явлением всплеска, такова: вначале жгут пузырьков водорода медленно движется вниз по потоку и затем начинает подниматься вверх от стенки. При $\eta \simeq 8-12$ жгут начинает колебаться. Эти колебания усиливаются и затем резко прекращаются в области $10 < \eta < 30$. После этого жгут сильно искажается, расширяется и выбрасывается вверх по некоторой траектории. Схематическая картина процесса разрушения жгута и последовательность режимов течения, предшествующих всплеску, показана на рис. 3.5. В работе [310] визуально исследовалось полностью развитое течение в трубе при больших числах

Рейнольдса. Было обнаружено, что всплески образуются, в отличие от [309], несколько дальше от стенки при $15 > \eta > 5$ и их частота и интенсивность увеличиваются с ростом числа Рейнольдса ($2300 < Re < 50000$). Оценки, приведенные в [310], показали, что всплески дают почти 70 % рейнольдсовых напряжений. В работе [311] были определены мгновенные значения произведения $u'v'$ в окрестности стенки, при этом оказалась, что в области всплесков $u'v' \sim 60\overline{u'v'}$

при $\eta = 30,5$. Приведенные данные свидетельствуют о наличии прямой связи между повторяющимися нестационарными организованными движениями и производством энергии турбулентного переноса.

Интерес представляет определенный в [312] экспериментально в широком диапазоне чисел Рейнольдса средний период всплесков. Безразмерное время T между всплесками оказалось в среднем равным

$$u_{\infty} T / \delta = 6. \quad (3.88)$$

При этом средняя частота всплесков не менялась существенно с расстоянием от стенки.

Детальное исследование структуры пристеночных жгутов было проведено в работе [313], рис. 3.6. Оказалось, что интенсивность вихрей, ориентированных вдоль потока, почти на порядок меньше средней интенсивно-

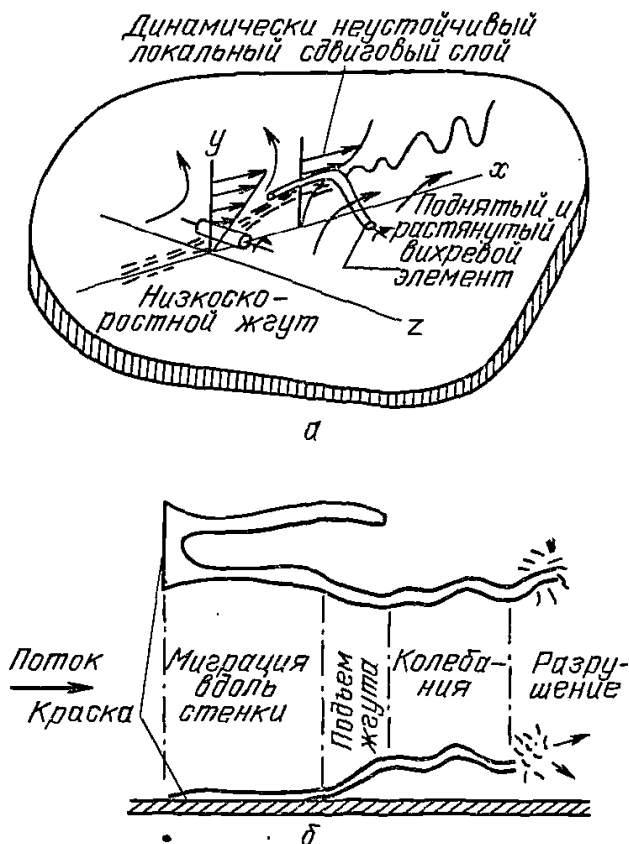


Рис. 3.5. Схемы структуры турбулентного пограничного слоя вблизи стенки, основанные на прямых наблюдениях: а) механизм разрушения жгутов; б) последовательность режимов течения, предшествующая выбросу

сти вихрей, ориентированных поперек потока. Жгуты, наблюдавшиеся в работе [309], были идентифицированы как область аккумуляции между направленными по потоку вихрями, в которых вертикальная компонента вторичного течения направлена от стенки. Продольный размер вихрей оценивался как $\Delta x_* = \Delta x v_* / v \simeq 1000$.

Не менее важное значение для понимания процессов переноса в турбулентном пограничном слое имеют исследования организованных структур во внешней области, их связи и взаимодействия с течением во внутренней пристеночной области [275]. Как известно, вблизи внешней границы пограничного слоя турбулентное дви-

жение перемежается с ламинарным (область перемежаемости). Вследствие этого граница пограничного слоя оказывается нерегулярной в пространстве и времени, в частности, для нее характерны ламинарные «впадины» и турбулентные «вспучивания». Исследования вспучивания показали, что в системе координат, движущейся со средней скоростью конвективного переноса, на задней части области вспучивания образуется точка торможения (примерно при $y/\delta = 0,8$). Иными словами, обращенная вверх по потоку часть границы между турбулентным и нетурбулентным течением является наиболее активной. Предположительно вспучивания поверхности раздела играют пассивную роль в формировании границы и поддержания рейнольдсовых напряжений во внешней области. Достаточно правдоподобной представляется гипотеза о том, что вспучивания вблизи границы пограничного слоя могут быть следствием спаривания вихрей, связанных с двумя — четырьмя всплесками. Скорости различных структур в крупномасштабном движении меняются в пределах $(0,7 \div 0,95)u_\infty$ с центром вращения, движущимся со скоростью $0,8u_\infty$.

На рис. 3.7 [275] приведены три модели крупномасштабных структур турбулентного пограничного слоя. Все рисунки изображают картину течения, наблюдаемую в системе координат, движущейся со скоростью $0,8u_\infty$; а) из работы [314], б) [315], в) [316].

Упомянутые выше лишь некоторые результаты исследований организованных структур в турбулентных пограничных слоях свидетельствуют о том, что до более или менее полного понимания

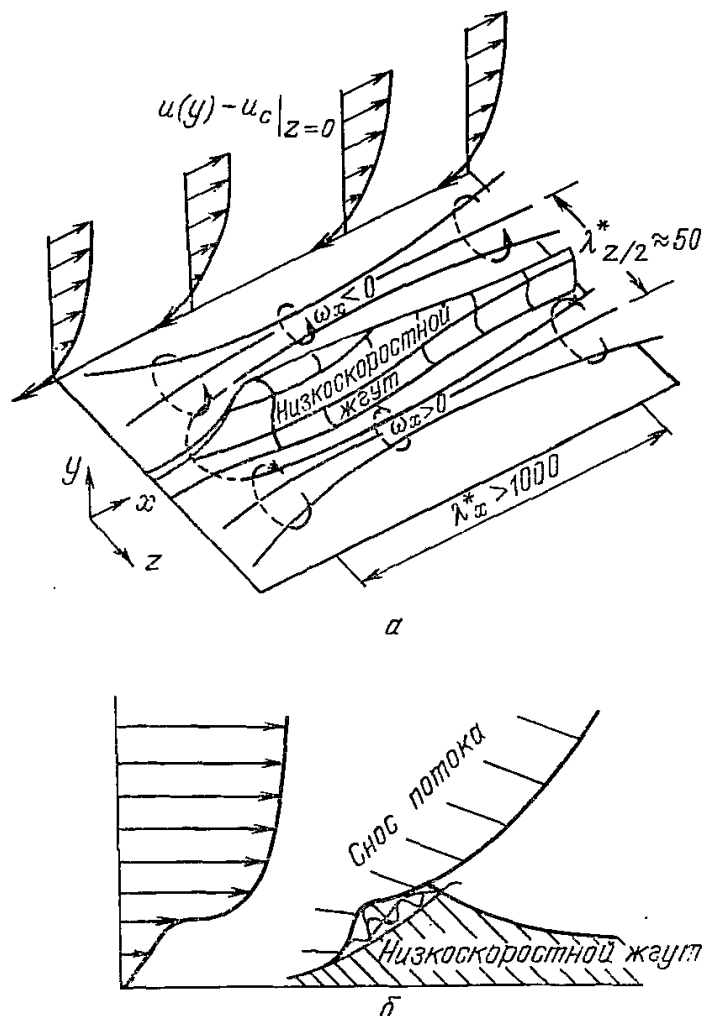


Рис. 3.6. Модель пристеночной структуры турбулентного пограничного слоя [313]: а) вращающиеся в противоположные стороны продольные вихри, приводящие к образованию низкоскоростных жгутов; б) локальная неустойчивость сдвигового течения на границе между сносящим потоком и низкоскоростным жгутом

процессов переноса предстоит пройти достаточно долгий путь. Тем не менее некоторые свойства организованных структур можно считать установленными [275]. Согласно [275] имеются четыре основных элемента организованных структур. Цепочка вращающихся в противоположных направлениях продольных вихрей колеблется

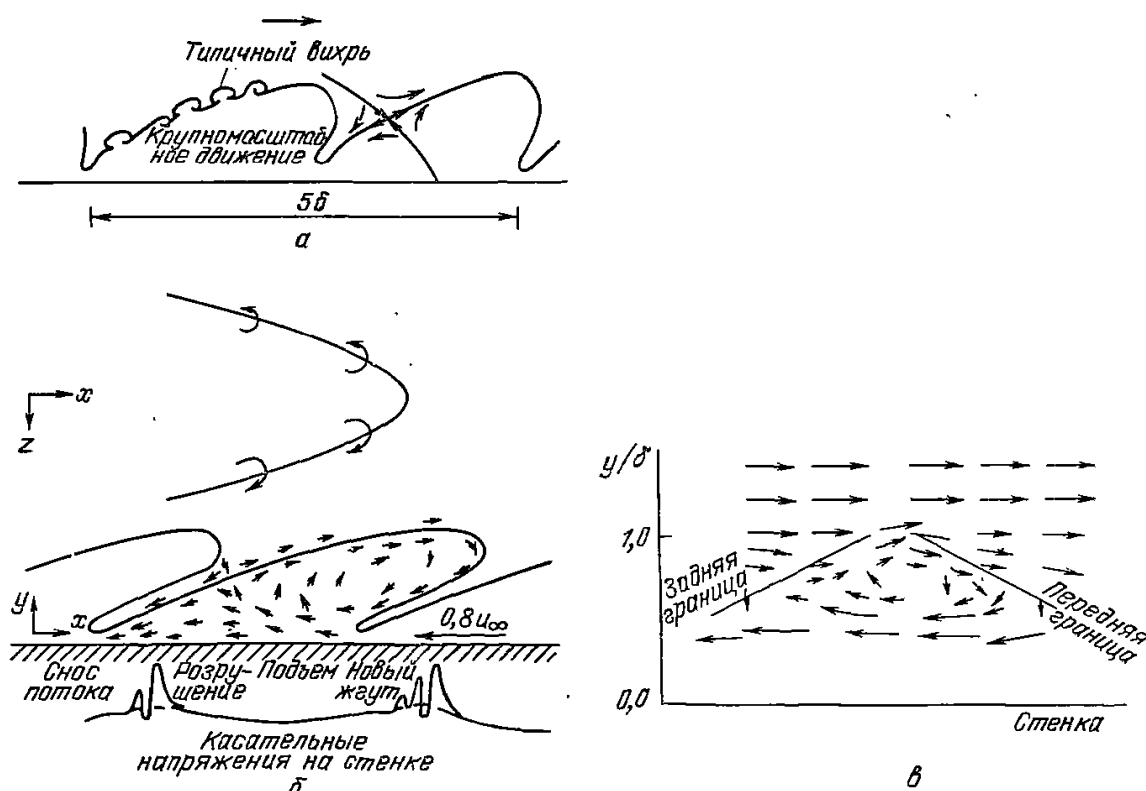


Рис. 3.7. Три модели внешней структуры турбулентного пограничного слоя:
а) [314], б) [315], в) [316]

вблизи стенки (см. рис. 3.6). Вихри плотно покрывают всю гладкую стенку. Чуть выше продольных вихрей, но все еще близко к стенке, расположен слой, постоянно разрушаемый всплесками, в которых происходят интенсивные мелкомасштабные движения жидкости большой энергии. Во внешнем слое также происходят интенсивные мелкомасштабные движения. Они обнаружены в основном на обращенной вверх по потоку границе раздела между турбулентным и нетурбулентным течениями задней части всучивания потока во внешней части слоя. Внешние мелкомасштабные движения являются частью общего поперечного вращения с масштабом, сравнимым с толщиной слоя. Основные характерные детали течения в пограничном слое вместе с обозначениями схематически представлены на рис. 3.8.

Выше уже отмечалось, что наиболее близким к поверхности элементом структуры являются продольные вихри, вращающиеся в противоположных направлениях. Размеры этих вихрей вдоль

соответствующих осей координат оцениваются следующим образом: $\lambda_x = 1000\nu/v_*$, $\lambda_y = 15\nu/v_*$, $\lambda_z = 100\nu/v_*$. При этом отмечается большой разброс в оценке λ_x ($1000 < \lambda_{x*} < 2000$), что связано, по-видимому, с различием между жгутами и системой продольных вихрей. Величина λ_y характеризует половину вертикального расстояния от стенки до центра продольного вихря ($10 < \lambda_y v_*/\nu < 25$); λ_z является характерным масштабом вихря в поперечном направлении

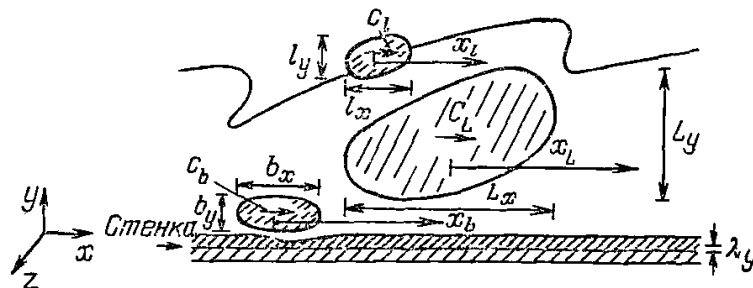


Рис. 3.8. Схематическое представление структуры пограничного слоя

(полная длина волны). Разброс в оценке этой величины по данным различных авторов невелик и составляет всего лишь 20 %.

Вторым характерным элементом структуры внутренней области являются энергонесущие вихри, вихри с большой энергией. Их масштабы оцениваются по-разному. Однако наиболее часто встречаются оценки: $b_x = (20 \div 40) \nu/v_*$, $b_y = (15 \div 20) \nu/v_*$; о b_z данные практически отсутствуют. Важными характеристиками пристеночных энергонесущих вихрей являются скорость их распространения c_b и расстояние x_b , на котором эти вихри сохраняются. Оценки этих величин таковы: $c_b = (0,65 \pm 0,05) u_\infty$, $x_b = (0,5 \div 1,5) \delta$. Относительно природы возникновения этих вихрей известно очень мало. Чаще всего механизм образования этих вихрей связывается с неустойчивостью течения, возникающей из-за появления точки перегиба в профилях скорости, рис. 3.6, б.

Судя по характерным масштабам энергонесущих вихрей b_x , b_y , составляющим 1—2 % от толщины слоя δ , эти мелкомасштабные вихри являются наиболее важным элементом течения во внутренней области слоя. Образуюсь, по-видимому, в переходной области ($5 < \eta < 40$), они заполняют логарифмический участок, определяя квазиизотропный характер турбулентности в этой области. Оценка расстояния x_b , на котором энергонесущие вихри сохраняются ($x_b = (0,5 \div 1,5) \delta$), хорошо согласуется с упомянутыми выше результатами опытов Клаузера о быстром затухании возмущений во внутренней области («короткая память»).

Основным элементом внешней области пограничного слоя являются крупномасштабные структуры с характерными размерами $L_x \simeq (1 \div 2) \delta$, $L_z = (0,5 \div 1) \delta$ на расстоянии $0,8 \delta$ от поверхности. Расстояние между центрами структур в продольном направлении

оценивается по порядку величины, как $(2 \div 3)\delta$. Скорость распространения крупномасштабных структур C_L оценивается величиной $C_L \simeq (0,8 \div 0,9)u_\infty$ на расстоянии $0,8\delta$. Очень неясной для интерпретации оказывается оценка расстояния x_L , на котором сохраняются крупномасштабные структуры: $x_L = (1,6 \div 2)\delta$ на расстоянии $0,8\delta$ от поверхности. С указанной оценкой, по-видимому, трудно согласовать представление Клаузера о «долгой памяти» внешней области. Впрочем, не следует забывать, что экспериментальное исследование когерентных структур далеко еще не завершено, последующие исследования, как можно надеяться, со временем внесут большую ясность в понимание структуры внешней области.

Вторым основным элементом структуры внешней области пограничного слоя являются так называемые внешние («типичные») вихри с большой энергией. Оценка масштабов этих вихрей такова: $l_x \simeq 200\nu/v_*$, $l_y \simeq 100\nu/v_*$, масштаб l_z не определен, также не определено расстояние x_i , на котором вихри сохраняются. Типичные значения скорости распространения этих вихрей по данным опытов лежат в интервале $(0,8 \div 0,9)u_\infty$. Существуют разные версии о вкладе внешних энергонесущих вихрей и крупномасштабных структур в рейнольдсовы напряжения, однако фактические данные не позволяют сделать сколько-нибудь надежных выводов в пользу той или иной точки зрения.

Среди других важных результатов экспериментальных исследований турбулентных пограничных слоев отметим данные Коулса [317] по максимальным значениям нормальных напряжений Рейнольдса, полученным в широком диапазоне чисел Рейнольдса

$(100 < \delta\nu_*/\nu < 10^4)$. Согласно этим данным $\sqrt{\overline{u'^2}}/v_* = 2,75$, $\sqrt{\overline{v'^2}}/v_* = 0,6$, $\sqrt{\overline{w'^2}}/v_* = 1,0$ при $\eta = 15$.

Приведенный краткий перечень некоторых результатов исследований отдельных элементов структуры турбулентных пограничных слоев, полученных в последние годы, свидетельствует о дальнейшем углублении представлений о характере процессов переноса в пограничных слоях. Вместе с тем нельзя не отметить и того очевидного обстоятельства, что приведенные качественные и ограниченные по объему количественные представления о структуре течения не содержат пока важных сведений о механизмах возникновения отдельных элементов структуры, их взаимодействии в тех или иных условиях. В частности, по-прежнему нет основы для описания релаксационных свойств внешней области, т. е. свойств, непосредственно связанных с эффектами «долгой памяти».

Отсутствие рациональных основ учета релаксационных свойств турбулентного пограничного слоя не является единственной причиной затруднений, возникающих при расчетах сильно неравновесных течений, в которых велика роль предистории потока. Столь же мало исследованным до сих пор остается вопрос о характере изменения относительной толщины внутренней и внешней областей

в зависимости от внешних условий и условий на стенке. Известно, что в турбулентном пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости, внутренняя область занимает около 20 % толщины слоя, а внешняя — остальные 80 %. Из опытов, однако, известно, что это соотношение между относительными протяженностями областей не сохраняется в течениях при больших продольных перепадах давления. Так, по мере приближения к точке отрыва относительная толщина внутренней области убывает. При этом претерпевает изменения и структура течения в этой области: участок логарифмического профиля скорости сокращается и в точке отрыва полностью вырождается.

В свете изложенных выше представлений об энергонесущих вихрях, заполняющих внутреннюю область, вырождение логарифмического участка по мере приближения к точке отрыва будет означать сокращение «жизненного пространства» этих вихрей, а вырождение (буферной) переходной области, в которой производится большая часть энергии турбулентности, означает исчезновение источника турбулентности, что в конечном счете должно привести к изоляции крупномасштабных когерентных структур во внешней области и естественному уменьшению компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Приведенная интерпретация возможного характера взаимодействия внешней и внутренней области в условиях приближения к точке отрыва, несмотря на свою привлекательность, нуждается в прямом экспериментальном подтверждении (подробно указанная версия взаимодействия областей будет рассмотрена в § 12).

Таким образом, лишь немногие вопросы, касающиеся структуры турбулентного пограничного слоя, можно считать в той или иной степени решенными. По-видимому, достаточно достоверным является установление факта создания большей части энергии турбулентности вблизи стенки и на всплесках. Однако механизм, приводящий к условиям, при которых происходит всплеск, продолжает оставаться неясным. Принято считать установленным, что среднее время между всплесками T (см. (3.38)) определяется внешними параметрами — толщиной слоя δ и скоростью потока u_∞ , однако не исключено, что зависимость этого времени от параметров на стенке и числа Рейнольдса просто не установлена из-за недостаточно широкого диапазона изменения этих параметров. Наиболее вероятной причиной образования всплесков считается неустойчивость мгновенного профиля скоростей (см. рис. 3.6, б). Точка перегиба мгновенного профиля скоростей в промежутке $30 < \eta < 50$ наблюдалась во многих работах. Согласно другой точке зрения, всплески являются результатом неустойчивости вязкого подслоя, создаваемой полем давления, связанным с движением крупномасштабных структур во внешней области.

Так или иначе, приведенный перечень нерешенных проблем, относящихся к турбулентным пограничным слоям в несжимаемой

10*

жидкости, выглядит весьма внушительным. Еще более сложными оказываются проблемы турбулентного пограничного слоя в газовых потоках при больших числах Маха и наличии теплообмена между газом и стенкой. Исследования организованных структур в таких потоках до сих пор, по-видимому, не проводились, анализ влияния сжимаемости, теплообмена, химических реакций и других осложняющих факторов на механизмы порождения турбулентности, ее переноса в настоящее время отсутствует. Фактически известными можно считать лишь некоторые особенности поведения профилей скорости в пограничных слоях при числах Маха, не превышающих 10, и различных интенсивностях теплообмена. Подробный обзор экспериментальных результатов исследования пограничных слоев в газовых потоках до 70-х гг. включительно содержится в монографии [318]. Здесь ограничимся лишь кратким перечнем основных особенностей структуры пограничных слоев в газовых потоках.

Анализ значительного числа измерений профилей скорости на пластине при различных значениях числа Маха ($0 < M_\infty < 9$) набегающего потока и температурного фактора, проведенный в монографии [318], показал, что в вязком подслое профиль скоростей удовлетворительно описывается линейной зависимостью $\varphi = \eta$. В пристеночной области профиль скоростей является логарифмическим. В случае теплоизолированной поверхности наклон логарифмического участка профиля оказывается таким же, как в несжимаемой жидкости. При наличии теплообмена наклон профиля скорости в этой области оказывается несколько большим, чем в несжимаемой жидкости.

Сравнение профилей скорости при больших числах Маха (опытные точки на рис. 3.9 [319]) и в несжимаемой жидкости (рис. 3.2) показывает, что при больших числах Маха переходная (буферная) область между вязким подслоем и турбулентным ядром существенно уменьшается. Если в несжимаемой жидкости переходная область начинается от $\eta = 5$ и кончается при $\eta = 30 \div 50$, то при больших числах Маха, например, в опытах Хилла [319] буферная область почти полностью вырождается и переход от вязкого подслоя к турбулентному ядру носит резкий характер.

Другой важной особенностью профилей скорости в сверхзвуковых потоках является увеличение толщины вязкого подслоя с ростом числа Маха. О характере изменения относительной толщины вязкого подслоя с ростом числа Маха при различных числах Рейнольдса можно судить по рис. 3.10 (на этом рисунке приведены опытные данные Хилла [319], Лобба, Винклер и Перша [320], а также Е. У. Рефика). Как видно из рисунка, в несжимаемой жидкости толщина вязкого подслоя δ_v не превышает 1—3 % толщины всего слоя δ . При $M_e = 9$ δ_v может занимать 30 % и более от толщины слоя, причем скорость нарастания относительной толщины вязкого подслоя с ростом числа Маха увеличивается. Умень-

шение числа Рейнольдса $Re^{**} = \delta^{**} u_e / \nu$ (δ^{**} — толщина потери импульса) также приводит к увеличению δ_x / δ .

Отмеченные особенности профилей скорости в пограничных слоях при больших числах Маха (вырождение переходной области, рост толщины вязкого подслоя) могут быть следствием существенных различий в вихревых структурах слоев в несжимаемой

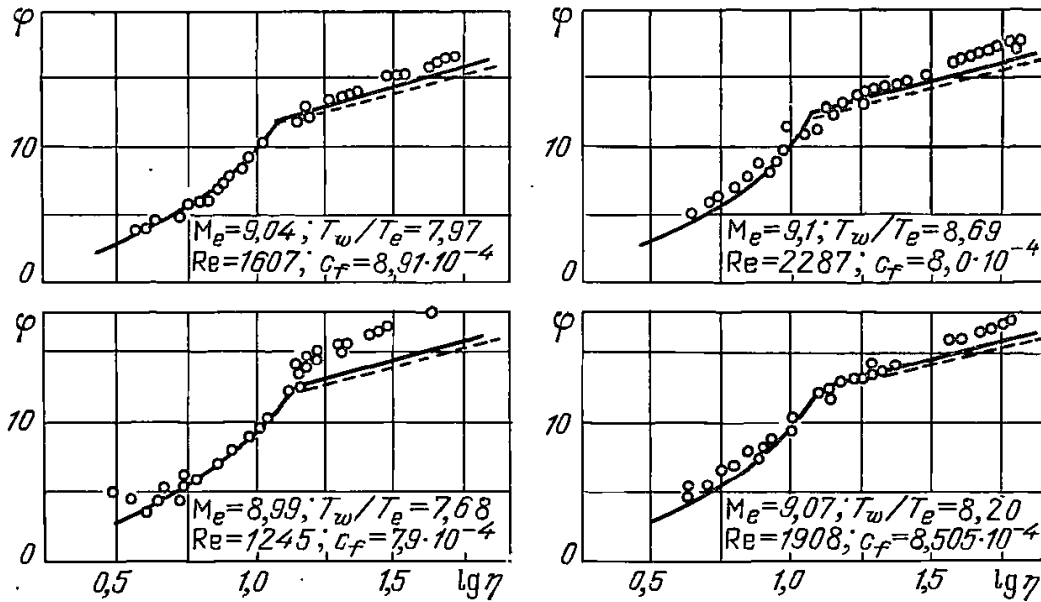


Рис. 3.9. Профили скорости в турбулентном пограничном слое плоской пластины при сверхзвуковых скоростях: опытные данные Хилла [319]

жидкости и в газовых потоках больших скоростей. Установление этих различий — актуальная задача ближайших десятилетий.

10.3. Уравнения пограничного слоя. Отмеченные выше обстоятельства по существу вынуждают прибегнуть при выводе уравнений турбулентного пограничного слоя к интуитивным приемам, в основе которых лежат соображения об определенной аналогии между ламинарным и турбулентным пограничными слоями, подтвержденные в большей или меньшей степени опытными данными. Суть этих соображений кратко выражается в допущении о малости толщины пограничного слоя по сравнению с его продольными размерами и, как следствие этого, малости продольных производных от некоторых величин по сравнению с поперечными.

Итак, не претендуя на строгость, выведем уравнения пограничного слоя в многокомпонентной реагирующей газовой смеси. Для простоты рассмотрим установившееся двумерное осредненное течение с осредненными скоростями $v_1 = u$ и $v_2 = v$ ($v_3 = 0$), соответствующими направлениям $s_1 = x$ вдоль поверхности тела (по потоку) и $s_2 = y$ по нормали к поверхности тела (рис. 3.11). Уравнения осредненного турбулентного движения (3.61) — (3.64) в этом

случае принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (3.89)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}^\Sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^\Sigma}{\partial y}, \quad (3.90)$$

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}^\Sigma}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}^\Sigma}{\partial y}, \quad (3.91)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{\partial J_{ix}^\Sigma}{\partial x} + \frac{\partial J_{iy}^\Sigma}{\partial y}, \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-q_x^\Sigma + u\tau_{xx}^\Sigma + v\tau_{yx}^\Sigma) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}(-q_y^\Sigma + u\tau_{xy}^\Sigma + v\tau_{yy}^\Sigma). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Следуя основной идее Прандтля, разделим все поле течения на две области: тонкую область вихревого движения, прилегающую к поверхности тела, в которой параметры течения резко меняются от значений на поверхности до значений во внешнем потоке (пограничный слой), и область потенциального (безвихревого)

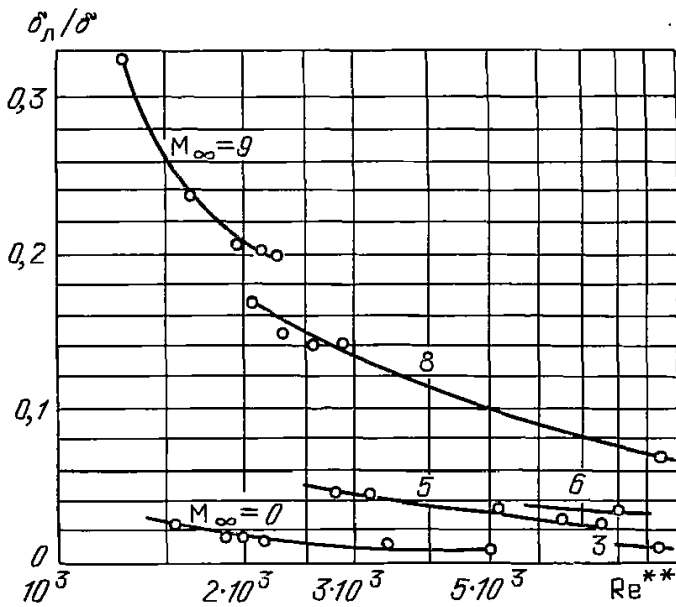


Рис. 3.10. Относительная толщина вязкого подслоя при различных числах Маха и Рейнольдса по опытным данным [319—320]

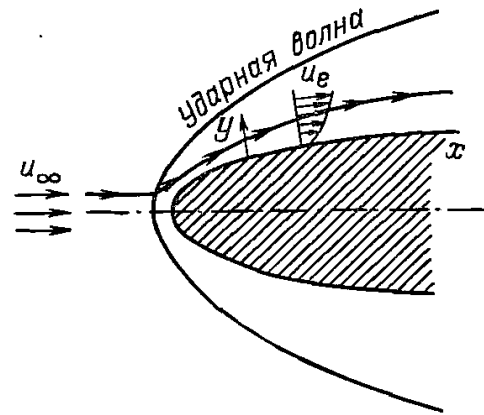


Рис. 3.11. Система координат для плоского течения в пограничном слое

течения (внешний поток). Толщину пограничного слоя δ будем считать малой величиной по сравнению с расстоянием x . Порядок значений x и u примем за единицу, т. е.

$$x \sim O(1) \quad \text{и} \quad u \sim O(1),$$

тогда

$$y \sim O(\delta) \quad \text{и} \quad v \sim O(\delta),$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim O(1) \text{ и } \frac{\partial}{\partial y} \sim O\left(\frac{1}{\delta}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sim O(1) \text{ и } \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sim O\left(\frac{1}{\delta^2}\right).$$

Порядок значений давления, плотности, концентраций и энтальпии примем за единицу:

$$p \sim O(1), \quad \rho \sim O(1), \quad c_i \sim O(1), \quad h \sim O(1).$$

Будем полагать также, что члены уравнений (3.90) — (3.93), описывающие процессы молекулярного переноса, не превышают остальных членов.

Основываясь на приведенных оценках и сохраняя в уравнениях системы (3.89) — (3.93) члены одного и того же порядка, приведем эту систему к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (3.94)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{\Sigma}}{\partial y}, \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\rho \overline{v''v''}), \quad (3.96)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} = w_i + \frac{\partial J_{iy}^{\Sigma}}{\partial y}, \quad (3.97)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-q_y^{\Sigma} + u \tau_{xy}^{\Sigma}). \quad (3.98)$$

Вследствие малости пульсаций поперечной скорости v'' в пограничном слое членом, стоящим в правой части уравнения (3.96), обычно можно пренебречь $\rho \overline{v''v''} \ll p$.

В плоском пограничном слое полная энтальпия H выражается через энтальпию h и проекцию скорости на ось y — u посредством равенства

$$H = h + \frac{u^2}{2}. \quad (3.99)$$

Подставляя равенство (3.99) в уравнение (3.98) с учетом уравнения (3.95), получим

$$\rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} = u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial q_y^{\Sigma}}{\partial y} + \tau_{xy}^{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.100)$$

Вопрос о границах применимости системы уравнений пограничного слоя (3.94) — (3.98) для многокомпонентных потоков реагирующего газа до последнего времени остается открытым. По существу единственным критерием справедливости решений этой систе-

мы является эксперимент. Для однородных по составу сверхзвуковых потоков газа и не слишком больших интенсивностей теплообмена между газом и поверхностью в монографии Себеси и Смита [226] на основе оценок и анализа некоторых опытных данных по пульсационным характеристикам в турбулентных пограничных слоях делается вывод о несущественном влиянии пульсаций плотности и пульсаций молекулярных коэффициентов переноса вплоть до чисел Маха, равных пяти.

Введенные равенствами (3.58) — (3.60) полные величины τ_{jh}^Σ , J_{ij}^Σ , q_j^Σ не следует рассматривать всегда как простую сумму соответствующих молекулярных и турбулентных величин. Необходимо иметь в виду, что в некоторых областях турбулентного пограничного слоя существенным становится взаимодействие процессов молекулярного и молярного переноса. Неучет этого обстоятельства может привести в ряде случаев к большим ошибкам, особенно при расчетах тепло- и массообмена в некоторых средах. Подробно этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Уравнения турбулентного пограничного слоя на осесимметричном теле вращения, обтекаемом потоком под нулевым углом атаки, записанные через полные величины, имеют тот же вид, что и уравнения ламинарного пограничного слоя:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u r) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r) &= 0, \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}(r \tau_{xy}^\Sigma), \\ \rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} &= w_i + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}(r J_{iy}^\Sigma), \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial y}[r(q_y^\Sigma + u \tau_{xy}^\Sigma)]. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Здесь

$$r(x, y) = r_0(x) + y \cos \alpha. \quad (3.102)$$

Система координат для осесимметричного течения изображена на рис. 3.12 (r_0 — радиус поперечной кривизны).

Для пограничного слоя, толщина которого δ много меньше радиуса поперечной кривизны r_0 ($\delta \ll r_0(x)$), система уравнений (3.101) упрощается: уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u r_0) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v r_0) = 0. \quad (3.103)$$

Остальные уравнения системы (3.101) приобретают форму уравнений для плоского течения в пограничном слое (3.94) — (3.98).

Уравнения пространственного турбулентного пограничного слоя на криволинейной поверхности, радиус кривизны которой много больше толщины пограничного слоя, в системе координат, связан-

ной с поверхностью тела так, как показано на рис. 3.13, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0, \quad (3.104)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^{\Sigma}}{\partial y}, \quad (3.105)$$

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zy}^{\Sigma}}{\partial y}, \quad (3.106)$$

$$\rho u \frac{\partial c_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_i}{\partial y} + \rho w \frac{\partial c_i}{\partial z} = w_i + \frac{\partial J_{iy}^{\Sigma}}{\partial y}, \quad (3.107)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(-q_y^{\Sigma} + u\tau_{xy}^{\Sigma} + w\tau_{yz}^{\Sigma}). \quad (3.108)$$

Здесь полная энтальпия H выражается равенством

$$H = h + \frac{u^2 + w^2}{2}, \quad (3.109)$$

проекции векторов скорости диффузии J_{iy}^{Σ} и плотности потока энергии q_y^{Σ} на ось y сохраняют тот же вид, что и при плоском течении.

Проекции градиента давления на оси x и z связаны с проекциями

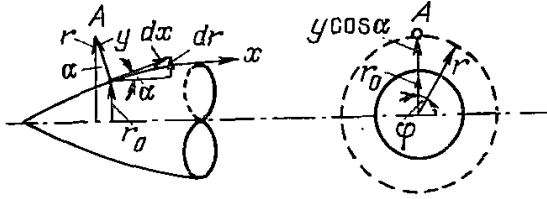


Рис. 3.12. Система координат для осесимметричного течения

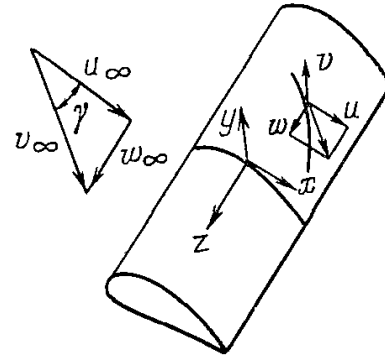


Рис. 3.13. Система координат для пространственного течения

скорости во внешнем потоке на те же оси u_e и w_e , если внешний поток — потенциальный, следующими соотношениями Бернулли:

$$u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} + w_e \frac{\partial u_e}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.110)$$

$$u_e \frac{\partial w_e}{\partial x} + w_e \frac{\partial w_e}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.111)$$

Применительно к стационарному плоскому течению в турбулентном пограничном слое уравнение переноса кинетической энергии турбулентных пульсаций (3.70) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(uk) + \frac{\partial}{\partial y}(vk) = \tau_{xy}^{\tau} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} (k/\rho) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \overline{v''v''} \right] - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v''k'} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{pv''}) - \mu \left(\frac{\partial v''}{\partial s_j} + \frac{\partial v''}{\partial s_k} \right) \frac{\partial v''}{\partial s_j}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

В уравнении (3.112) два члена в левой части уравнения описывают конвективный перенос энергии турбулентности; в правой части первый член характеризует производство энергии турбулентности, второй — диффузию энергии за счет вязкости, третий — турбулентный перенос энергии, четвертый — работу сил давления в пульсационном движении, пятый — диссипацию энергии турбулентности за счет вязкости.

Уравнение для скорости диссипации (3.82) для тех же условий, что и предыдущее уравнение, упрощается и принимает вид

$$u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'' \varepsilon'}) - 2\nu \frac{\partial v''_i}{\partial s_k} \frac{\partial v''_i}{\partial s_j} \frac{\partial v''_k}{\partial s_j} - 2 \left(\nu \frac{\partial^2 v''_i}{\partial s_j^2} \right)^2. \quad (3.113)$$

§ 11. Полуэмпирические гипотезы турбулентности для замыкания уравнений для первых моментов

Система уравнений переноса в осредненном турбулентном движении (3.61) — (3.64), (3.66) является незамкнутой, поскольку включает неизвестные — тензор турбулентных напряжений τ_{jk}^T (3.55), турбулентный поток массы i -й компоненты J_{ij}^T (3.56) (i — номер компоненты, j — направление оси), турбулентный поток энергии (тепла) q_j^T (3.57).

Незамкнутость системы уравнений переноса, обусловленная присутствием в этих уравнениях корреляционных членов, выражающихся через пульсационные характеристики движения, приводит к необходимости постулирования дополнительных соотношений, так или иначе связывающих входящие в уравнения параметры осредненного и пульсационного движения. Характерной чертой указанных дополнительных соотношений, получивших наименование гипотез турбулентности, является использование в большей или меньшей степени информации эмпирического, т. е. заимствованного из опыта характера, в связи с чем большинство гипотез турбулентности являются по форме и существу полуэмпирическими.

Гипотезы, необходимые для замыкания уравнений для первых моментов, принято иногда называть алгебраическими. Кроме того, в связи с широким использованием послойных схем пограничного слоя гипотезы турбулентности классифицируют в зависимости от их предназначения: в п. 11.3 будут рассмотрены гипотезы для внутренней (пристеночной) области, в п. 11.4 — для внешней области пограничного слоя. При этом основное внимание будет уделено гипотезам турбулентности, которые нашли или могут найти, по мнению авторов, широкое применение в исследованиях турбулентных пограничных слоев. Читателям, интересующимся рассматриваемой проблемой в более широком плане, можно рекомендовать обзор [300], монографии [8, 308, 321].

11.1. Тензор турбулентных напряжений. Гипотеза Буссинеска. Тензор турбулентных (рейнольдсовых) напряжений

$$\tau_{jk}^T = \begin{pmatrix} \overline{\rho u'^2} & \overline{\rho u'v'} & \overline{\rho u'w'} \\ \overline{\rho v'u'} & \overline{\rho v'^2} & \overline{\rho v'w'} \\ \overline{\rho w'u'} & \overline{\rho w'v'} & \overline{\rho w'^2} \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

является симметричным тензором 2-го ранга.

В общем случае проблема замыкания сводится к установлению его связи с тензором осредненных скоростей деформаций. Эта связь, как об этом свидетельствуют экспериментальные данные, является нелинейной, а сами турбулентные течения обладают свойствами анизотропии и наследственности (эффекты памяти). Одновременное описание всех указанных свойств турбулентных потоков оказывается делом крайне сложным и на данном этапе развития теории турбулентности практически невозможным. Основные достижения в исследовании процессов турбулентного переноса связаны с изучением изотропной и локально изотропной турбулентности [322]. Что касается проблемы наследственности в турбулентных потоках, то эта проблема находится в состоянии начальной разработки, и результаты, полученные в этом направлении, пока еще не столь весомы, как в других областях теории турбулентности (изложение состояния вопроса о наследственных (релаксационных) явлениях в турбулентных пристенных пограничных слоях содержится в работах Л. Г. Лойцянского [323—324] и обзоре Б. А. Кадера, А. М. Яглома [325]).

Вероятно, первая, основанная на чисто интуитивных соображениях попытка описания процессов переноса количества движения в турбулентных потоках принадлежит Буссинеску [326]. Согласно модели Буссинеска, турбулентное движение среды рассматривалось как движение ньютоновской «турбулентной жидкости». Иными словами, классическая формула Буссинеска предполагала линейную связь тензора турбулентных напряжений с тензором осредненных скоростей деформации

$$\tau_{jk}^T/\rho = -\frac{1}{3} \overline{v'_i v'_i} \delta_{ij} + \nu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial s_k} + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial s_j} \right). \quad (3.115)$$

Здесь, как обычно, штрихами обозначены пульсации скоростей, а чертой сверху — осредненные по времени величины; ν_T — кинематический коэффициент турбулентной вязкости, δ_{ij} — символ Кронекера; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В простейшем случае плоского сдвигового (по оси y) турбулентного движения формула (3.115) принимает вид

$$\tau_{xy}^T = -\rho \overline{u'v'} = \rho \nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.116)$$

Уместно отметить, что исследование Буссинеска было проведено задолго до появления в 1894 г. классической работы Осборна Рейнольдса [294], в которой был сформулирован подробно рассмотренный выше в § 8 новый подход к проблеме описания турбулентности: введены понятия осредненного и пульсационного движения, указаны правила осреднения, выписан тензор турбулентных напряжений.

Последующие исследования турбулентности в потоках со сдвигом показали, что идея «градиентного» описания процессов переноса количества движения в таких потоках, заключенная в формуле (3.115), получившей наименование формулы Буссинеска, является весьма плодотворной. В дальнейшем градиентный способ описания был обобщен на процессы переноса тепла, вещества и других физических субстанций.

Предположения Буссинеска о характере коэффициента турбулентной вязкости ν_t оказались ошибочными. Этот коэффициент в турбулентном сдвиговом потоке не является постоянной величиной, а существенно зависит от осредненных характеристик потока в данной точке, а в ряде случаев и от характеристик турбулентности потока в целом. Отмеченное обстоятельство не позволяет отнести формулу Буссинеска к полуэмпирическим гипотезам турбулентности с учетом современного существа этого термина, поскольку коэффициент ν_t остается фактически не определенным, и для его нахождения необходимы дополнительные предположения.

При оценке возможностей использования формулы Буссинеска (3.115) необходимо иметь в виду, что градиентное представление потоков количества движения, тепла, вещества и других физических субстанций, хотя и позволяет описать очень широкий класс сдвиговых течений, однако не является универсальным. Хорошо известно, что градиентное представление позволяет более или менее удовлетворительно описать процессы переноса в областях со значительной неоднородностью полей скорости, температур, концентраций, например, в пристенной части турбулентного пограничного слоя, в пристенной части течения в канале. Однако в областях с небольшой неоднородностью полей, например, во внешней части пограничного слоя (там, где $du/dy \rightarrow 0$), на оси симметричного канала градиентное описание процессов переноса может оказаться неэффективным. Особенно это замечание справедливо для так называемых неравновесных турбулентных пограничных слоев, в которых существенно влияние предыстории потока, т. е. проявляются упоминавшиеся в предыдущем параграфе эффекты «долгой памяти» (релаксационные эффекты).

11.2. Гипотеза локальности механизма турбулентного переноса. Формула Прандтля. Формула Кармана. Сформулированный Буссинеском градиентный подход к описанию процессов турбулентного переноса неявно заключал в себе допущение о том, что механизм турбулентного переноса определяется в сдвиговом потоке локаль-

ными характеристиками потока, поскольку, согласно формуле Буссинеска, значение турбулентного напряжения в данной точке выражалось через скорость сдвига в той же точке (через значение du/dy). Однако эта идея «локальности механизма турбулентного переноса» не получила в работе Буссинеска дальнейшего развития и не была использована для определения коэффициента турбулентной вязкости. Прошло почти пятьдесят лет, прежде чем в работе Прандтля [327] (1925 г.) идея «локальности» обрела современные четкие контуры и была весьма эффективно использована для определения коэффициента турбулентной вязкости.

Работа Прандтля положила начало, по существу, всей современной полуэмпирической теории турбулентности и открыла новые широкие возможности для исследования свойств турбулентных течений.

Большинство современных полуэмпирических гипотез турбулентности в большей или меньшей степени основываются на совокупности допущений, составляющих содержание гипотезы, получившей наименование «гипотезы локальности механизма турбулентного переноса» (Л. Г. Лойцянский [328]). Важнейшим из упомянутых допущений является допущение о том, что механизм турбулентного переноса количества движения полностью определяется заданием местных значений производных от осредненных скоростей по поперечной к направлению потока координате и физических свойств жидкости. Влияние процессов, происходящих вдали от рассматриваемой точки турбулентного потока, гипотезой локальности не учитывается.

Отметим, что сама местная скорость u в соответствии с принципом относительности Галилея влияние на процессы переноса оказывать не может.

Основываясь на гипотезе локальности и на соображениях размерности, можно получить формулу полуэмпирической теории Прандтля.

В теории Прандтля принимается, что местное изменение осредненной скорости определяется только первой производной скорости du/dy , поэтому соображения размерности приводят к необходимости введения дополнительного понятия о длине пути перемешивания, без которой составление формулы напряжения трения невозможно. Используя соображения размерности, можно установить, что единственно возможной комбинацией величин плотности жидкости ρ , пути перемешивания l и производной скорости du/dy , выражающей напряжение трения τ_{xy}^T , является

$$\tau_{xy}^T = - \rho \overline{u'v'} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2. \quad (3.117)$$

Строгий вывод формулы Прандтля из соображений размерности приведен в учебном пособии Л. Г. Лойцянского [13].

Количественное выражение зависимости $l(y)$ следует определять из дополнительных соображений. Величине l не обязательно придавать смысл пути перемешивания, как это первоначально было сделано Прандтлем. Более естественной представляется получившая в последнее время известное распространение трактовка l как масштаба турбулентности, т. е. как величины, характеризующей геометрическую структуру турбулентного потока или средний размер участвующих в турбулентном переносе жидких объемов «вихрей». Важно подчеркнуть, что формула Прандтля (3.117), будучи «локальной по духу», вместе с тем оставляет некоторые возможности для учета интегральных свойств потока, его предыстории благодаря неопределенности величины l .

На основе экспериментальных данных, полученных Никурадзе в гладких трубах [329], Прандтль предложил следующую эмпирическую формулу для величины l :

$$\frac{l}{R} = 0,14 - 0,08 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^2 - 0,06 \left(1 - \frac{y}{R}\right)^4. \quad (3.118)$$

Здесь R — радиус трубы.

Для небольших расстояний от стенки формула (3.118) приводит к зависимости

$$l = \kappa y \quad (3.119)$$

со значением постоянной κ , равным 0,4.

Зависимость (3.119) была использована Прандтлем в работе, относящейся к 1933 г. [330], для описания турбулентного течения вблизи безграничной стенки.

Последующие исследования показали, что зависимость (3.119) справедлива лишь во внутренней (пристеночной) области пограничного слоя за исключением тонкого по сравнению с толщиной всего слоя в несжимаемой жидкости вязкого подслоя и переходной области, непосредственно граничащих с твердой поверхностью.

Во внешней части пограничного слоя, а также в свободных турбулентных течениях удовлетворительные результаты в некоторых случаях удалось получить на основе формулы Прандтля (3.117) с использованием допущения о постоянстве пути перемешивания l по сечению струи (внешней области пограничного слоя)

$$l = \text{const.} \quad (3.120)$$

В пограничном слое на плоской пластине, обтекаемой потоком несжимаемой жидкости, характер изменения пути перемешивания поперек слоя показан на рис. 3.14. Как видно из рисунка, во внешней части пограничного слоя отношение l к толщине слоя δ постоянно и примерно равно 0,09. Отметим также, что граница между внутренней областью, в которой справедлива зависимость (3.119), и внешней, где имеет место соотношение (3.120), определяются эмпирически. Безразмерное значение координаты точки y_m , в кото-

рой меняется характер изменения l в соответствии с опытными данными для плоской пластины в несжимаемой жидкости, составляет

$$y_m/\delta = 0,20 \div 0,22. \quad (3.121)$$

Приведенное на рис. 3.14 распределение пути перемешивания использовалось различными авторами для расчетов характеристик турбулентных пограничных слоев на пластине и при небольших продольных перепадах давления. Различия между моделями различных авторов, подобными той, что приведена на рис. 3.14, обычно сводятся к различию постоянных, используемых в этих моделях. Приведем значения этих постоянных, принятые в модели Эскудиера [331]:

$$l/\delta = \kappa(y/\delta) \quad \text{при} \quad y/\delta \leq \lambda/\kappa, \quad (3.122)$$

$$l/\delta = \lambda \quad \text{при} \quad y/\delta \geq \lambda/\kappa, \\ \kappa = 0,41, \quad \lambda = 0,09.$$

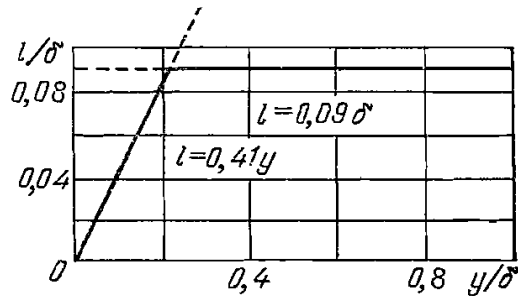


Рис. 3.14. Распределение пути перемешивания в турбулентном пограничном слое по модели Эскудиера [331]

Применение рассматриваемой схемы к расчету существенно неравновесных пограничных слоев (например, находящихся в предотрывном состоянии) во многих случаях не привело к хорошему согласованию расчетных и опытных данных.

Принимая в рамках гипотезы локальности механизма турбулентного переноса допущение о том, что локальные свойства потока определяются первой и второй производными от осредненной скорости по поперечной координате (в гипотезе Прандтля учитывается влияние только первой производной), нетрудно на основе соображений размерности прийти к заключению о существовании и единственности формулы напряжения трения

$$\tau_{xy}^T = \rho \kappa^2 \frac{(\partial u / \partial y)^4}{(\partial^2 u / \partial y^2)^2}, \quad (3.123)$$

получившей наименование формулы Кармана. Сравнивая формулы (3.123) и (3.117), найдем, что

$$l = -\kappa \frac{\partial u / \partial y}{\partial^2 u / \partial y^2}, \quad \kappa = 0,41. \quad (3.124)$$

Как видно из формулы Кармана, для определения напряжения трения по этой формуле нет необходимости, по существу, привлекать понятие о турбулентном пути перемешивания. Это обстоятельство делает формулу Кармана в некоторых случаях несколько предпочтительной по сравнению с формулой Прандтля, например, при расчете «безградиентных» течений несжимаемой и сжимаемой жидко-

сти, т. е. течений, в которых «предыстория потока» не играет существенной роли.

Однако при рассмотрении течений с градиентом давления роль предыстории потока существенно возрастает. В этом случае формула Прандтля, содержащая неопределенную величину l , оставляет больше возможностей для учета предыстории потока и поэтому является более предпочтительной по сравнению с формулой Кармана. Существенным недостатком формулы Кармана является также невозможность ее применения к расчету течений, в которых профили скоростей имеют точку перегиба. В этой точке вторая производная от скорости по поперечной координате обращается в нуль ($\partial^2 u / \partial y^2 = 0$), что в соответствии с формулой (3.123) приводит к бесконечно большому напряжению трения в пограничном слое. В связи с этим формула Кармана не получила применения в теории свободных турбулентных течений, для которых характерна s-образность профиля скоростей; по той же причине нельзя надеяться на успех применения этой формулы при расчете предотрывных турбулентных пограничных слоев.

В историческом плане заслуживает упоминания гипотеза Рейхардта [332], длительное время широко применявшаяся в расчетах внутренних турбулентных течений

$$v_T/v = 0,4 \left\{ \eta - 7,15 \left[\operatorname{th} \left(\frac{\eta}{7,15} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 \left(\frac{\eta}{7,15} \right) \right] \right\}. \quad (3.125)$$

11.3. Взаимодействие процессов молекулярного и турбулентного переноса вблизи твердой поверхности (эффективная вязкость). Демпфирующий фактор в теории Прандтля. Применение формулы Прандтля (3.117) с использованием зависимости пути перемешивания в форме (3.119) приводит к необходимости дискретных расчетных схем, например, двухслойной прандтлевской схемы. Принципиальным недостатком схем подобного рода является неучет взаимодействия существенно отличающихся друг от друга процессов переноса, протекающих в непосредственной близости от стенки (молекулярные процессы) и в области развитого турбулентного движения. Неучет этого взаимодействия, вообще говоря, не приводит к существенным погрешностям при расчете сопротивления тел при небольших продольных перепадах давления, что, как отмечалось выше, обеспечило жизнеспособность простой двухслойной прандтлевской схемы в течение длительного времени.

Тем не менее потребность в достаточно аккуратном описании взаимодействия процессов молекулярного и турбулентного переноса, в особенности стимулированная исследованиями тепло- и массообмена в средах с большими числами Прандтля и Шмидта, становилась все более очевидной. Немаловажную роль в создании «непрерывных» моделей турбулентности, так или иначе учитывающих указанное взаимодействие, сыграло широкое применение ЭВМ в расчетах турбулентных течений. История развития моделей взаи-

модеиствия насчитывает немногим более трех десятилетий. Подробный обзор моделей с их описанием содержится в монографии [8]. Наибольшую известность и широкое применение получила модель, предложенная в 1956 г. Ван-Дристом [333].

Необходимо, однако, подчеркнуть, что до последнего времени эти модели не сыграли той важной принципиальной роли, которую они могли бы сыграть при описании столь сложных явлений, как отрыв и реламинизация турбулентного пограничного слоя соответственно при больших положительных и отрицательных перепадах давления. Решающее значение при этом имело то обстоятельство, что практически все модели турбулентности базировались в той или иной степени на неявном предположении о «замороженности» структуры слоя. В качестве примера такой модели можно указать на рассмотренную выше модель Эскудиера (3.122), в которой граница между внутренней и внешней областями жестко фиксировалась. Надо, однако, сказать, что и более «гибкие» модели, основанные, например, на сращивании турбулентных вязкостей на границе внутренней и внешней областей, не позволили в силу ограниченности моделей для внешней области «выявить» глубокую значимость процессов взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса (подробно эти вопросы будут рассмотрены в § 12).

Возвращаясь к упомянутой выше модели взаимодействия Ван-Дриста, отметим, что в основу модели было положено допущение об аналогии между движением вязкой жидкости вблизи колеблющейся параллельно самой себе плоской безграничной пластины (вторая задача Стокса [334]) и турбулентным движением в окрестности стенки (подробное рассмотрение модели содержится в [8]). Разумеется, подобное обоснование с учетом изложенных в § 11 результатов исследований структуры вязкого подслоя и переходной области не может быть признано убедительным. Тем не менее формула Ван-Дриста получила широкое применение не только при расчете течений на плоской пластине, как это было предусмотрено ее автором, но и при расчетах течений с продольными перепадами давления. Причем в процессе «эксплуатации» формулы Ван-Дриста многими авторами были предложены различные ее не слишком обоснованные модификации (см. [8]).

В действительности формула Ван-Дриста может быть достаточно строго обоснована без привлечения аналогии с нестационарным движением вязкой жидкости. Ниже приводится с небольшими изменениями вывод этой формулы, предложенный Л. Г. Лойцянским *). В основу вывода положена модель взаимодействия молекулярного и турбулентного переноса количества движения, тепла и вещества при турбулентном движении в трубах, опубликованная ее

*) Все последующие рассуждения основываются на материалах доклада Л. Г. Лойцянского на VI Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике (Ташкент, сентябрь 1986 г.).

автором в начале 60-х гг. [335—336], а затем распространенная на течение на плоской пластине [337].

Изложим вкратце основные положения этой модели. Напомним, что переходная область расположена между вязким подслоем и участком логарифмического профиля скоростей (рис. 3.3). В качестве характерных масштабов длины и скорости для этой области естественно принять прандтлевский путь смешения $l_{Pr} = \kappa y$ и скорость $V = l_{Pr} \frac{du}{dy}$ (для наших целей зависимость $u(x)$ несущественна). Еще одним существенным параметром, влияющим на течение в переходной области, является кинематическая вязкость ν . Из трех размерных параметров l_{Pr} , V , ν можно составить один безразмерный (R), который принято называть локальным числом Рейнольдса

$$R = \frac{V l_{Pr}}{\nu} = l_{Pr}^2 \frac{du}{dy} / \nu = \frac{\nu_{TPr}}{\nu}, \quad (3.126)$$

$$\nu_{TPr} = l_{Pr}^2 \frac{du}{dy}. \quad (3.127)$$

Далее из соображений подобия будем полагать, что полное безразмерное напряжение трения $\tau_{xy}^{\Sigma} / \rho V^2$ зависит только от локального числа Рейнольдса R , т. е.

$$\tau_{xy}^{\Sigma} / \rho V^2 = F(R). \quad (3.128)$$

Принимая для турбулентного напряжения τ_{xy}^T гипотезу Буссинеска (3.116) $\tau_{xy}^T = \rho \nu_T \frac{du}{dy}$, запишем полное напряжение трения в виде

$$\tau_{xy}^{\Sigma} = \tau_{xy} + \tau_{xy}^T = \mu \frac{du}{dy} \left(1 + \frac{\nu_T}{\nu} \right). \quad (3.129)$$

Подставляя в левую часть равенства (3.128) вместо τ_{xy}^{Σ} его выражение (3.129), получим

$$1 + \nu_T / \nu = R F(R) = f(R). \quad (3.130)$$

Далее введем в рассмотрение демпфирующий фактор $\mathcal{D}(R)$, определив его как отношение действительной, т. е. учитывающей влияние вязкости на турбулентное трение, турбулентной вязкости ν_T к ее прандтлевскому значению (3.127), т. е.

$$\mathcal{D}(R) = \nu_T / \nu_{TPr}. \quad (3.131)$$

Используя равенство 3.130, нетрудно с помощью соотношения (3.126) связать демпфирующий фактор $\mathcal{D}(R)$ с переходной функцией $f(R)$. В итоге будем иметь

$$\mathcal{D}(R) = [f(R) - 1] / R. \quad (3.132)$$

Исключая du/dy из (3.129) с помощью (3.127), получим по-

лезное для дальнейшего равенство

$$R f(R) = l_{Pr}^2 (\tau_{xy}^2 / \rho) / \nu^2. \quad (3.133)$$

Далее перейдем к определению вида переходной функции $f(R)$, что позволит в свою очередь определить вид демпфирующего фактора $\mathcal{D}(R)$ (3.122). При этом удовольствуемся разысканием двух крайних асимптотик этой функции при малых и больших значениях R .

Запишем локальное число Рейнольдса R в переменных закона стенки

$$R = \kappa^2 y^2 \frac{du}{dy} \bigg| \nu = \kappa^2 \eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta} \quad (3.134)$$

$$(\varphi = u/\nu_*, \quad \eta = y\nu_*/\nu, \quad \nu_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}).$$

Имея в виду, что при малых η профиль скоростей в вязком подслое линеен (3.83), найдем

$$R = \kappa^2 \eta^2. \quad (3.135)$$

Кроме того, примем во внимание «закон четвертой степени» изменения коэффициента турбулентной вязкости ν_t при удалении от стенки [338]

$$\nu_t/\nu = \gamma \kappa^4 \eta^4 \quad (\gamma = 0,0092, \quad \kappa = 0,4). \quad (3.136)$$

По определению $f(R)$ (3.130) и согласно равенствам (3.135), (3.136) получим нижнюю асимптотику, справедливую при малых R :

$$f(R) = 1 + \gamma R^2. \quad (3.137)$$

Верхнюю асимптотику, соответствующую большим R , найдем, замечая, что вне границ переходной области $\nu_t = \nu_{tPr}$ и, следовательно, по (3.130)

$$f(R) = 1 + \nu_{tPr}/\nu = 1 + R. \quad (3.138)$$

Имея в виду установленные в опытах границы переходной области $5 \leq \eta \leq 30$ (см. п. 10.2), нетрудно установить нижние и верхние предельные значения локального числа Рейнольдса. Нижнее предельное значение найдем, положив в (3.135) $\kappa = 0,4$, $\eta = 5$; будем иметь $R_n = 4$.

Верхнее предельное значение получим, положив в (3.134) $\kappa = 0,4$, $\eta = 30$, а $d\varphi/d\eta$ определив из логарифмического профиля скоростей (3.85). В результате найдем $R_v = 12$.

Анализ, проведенный в работе [327], показал, что неточность в выборе вида переходной функции, а следовательно, и демпфирующего фактора, мало сказывается на форме профиля скорости.

Одна из возможных форм переходной функции с параметром n , строго удовлетворяющая найденным выше асимптотикам (3.137) и (3.138), может быть записана в виде

$$f(R) = 1 + R \{1 - \exp [-(\gamma R)^{1/n}]\}^n. \quad (3.139)$$

Соответствующее семейство демпфирующих факторов (3.132) приобретает форму

$$\mathcal{D}(R) = \{1 - \exp[-(\gamma R)^{1/n}]\}^n. \quad (3.140)$$

Если положить в (3.140) $n=2$, $R = \kappa^2 \eta^2$ по (3.135), то получим известную формулу Ван-Дриста [333]

$$\mathcal{D}(\eta) = [1 - \exp(-\eta/A_*)]^2, \quad A_* = 1/\kappa \sqrt{\gamma} \simeq 26. \quad (3.141)$$

Эмпирическая константа Ван-Дриста A_* , как видно из (3.141), выражается через основные константы турбулентности $\kappa = 0,4$ и $\gamma = 0,0092$.

Формула Ван-Дриста (3.141) была получена в довольно грубом приближении, а именно в предположении о линейном характере профиля скоростей в переходной области ($\varphi = \eta$, $d\varphi/d\eta = 1$, $R = \kappa^2 \eta^2$) и без учета влияния продольного перепада давления. Учет этого влияния можно приближенно осуществить, обратившись к соотношению (3.133), предварительно записав его в переменных закона стенки

$$R f(R) = \kappa^2 \eta^2 \left(\frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} \right). \quad (3.142)$$

Разлагая правую часть (3.139) при $n=2$ в ряд и подставляя это разложение в соотношение (3.142), получим после простых преобразований с учетом малости параметра γ

$$R = \kappa^2 \eta^2 \left(\frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} \right) - \gamma R^3 + \gamma \sqrt{\gamma} R^{7/2} + O(\gamma^2 R^4). \quad (3.143)$$

Полагая в первом приближении, что

$$R^{(1)} = \kappa^2 \eta^2 \left(\frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} \right), \quad (3.144)$$

примем во втором приближении

$$R^{(2)} = \kappa^2 \eta^2 \left(\frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} \right) - \gamma \kappa^6 \eta^6 \left(\frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} \right)^3 \quad (3.145)$$

и т. д.

Ограничиваясь первым приближением для R , получим после подстановки (3.144) в (3.140) при $n=2$

$$\mathcal{D}(\eta) = \left[1 - \exp\left(-\eta \sqrt{\tau_{xy}^\Sigma / \tau_w} / A_*\right) \right]^2. \quad (3.146)$$

Эта форма демпфирующего фактора была предложена без обоснования в работе Патанкара и Сполдинга [308].

Примем в качестве распределения напряжений трения в пристеночной области следующее соотношение:

$$\frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} = 1 + \frac{dp}{dx} \frac{y}{\tau_w} = 1 + p_* \eta, \quad p_* = \frac{\nu}{\rho \nu_*^3} \frac{dp}{dx}. \quad (3.147)$$

Это соотношение получается после интегрирования упрощенного уравнения движения, в котором отброшены конвективные члены. Вводя обозначение

$$A = A_* / \sqrt{\tau_{xy}^\Sigma / \tau_w} = A_* (1 + p_* \eta)^{-1/2}, \quad (3.148)$$

преобразуем выражение для демпфирующего множителя (3.146) к первоначальной форме, предложенной Ван-Дристом:

$$\mathcal{D}(\eta) = [1 - \exp(-\eta/A)]^2. \quad (3.149)$$

Соотношение (3.149), впервые использованное в работе Себечи, Смита, Мосинскиса [339], также без обоснования, является обобщением демпфирующего фактора Ван-Дриста (3.141) на течения с продольным градиентом давления; при $dp/dx = 0$ (3.149) переходит в (3.141).

Все изложенное для наглядности показано в приложении к простой формуле Ван-Дриста, но, естественно, тот же анализ при необходимости может быть проведен и для более точного определения переходной функции [337].

Возвращаясь к равенству (3.131), запишем выражение для турбулентной вязкости с учетом полученного выражения для демпфирующего фактора

$$\nu_T = \kappa^2 y^2 \mathcal{D} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.150)$$

Формула Прандтля (3.117) с учетом (3.150) примет следующий вид:

$$\tau_{xy}^T = \rho \kappa^2 y^2 \mathcal{D} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3.151)$$

Введем в рассмотрение понятие эффективной вязкости

$$\mu_{\text{эф}} = \mu + \mu_T = \mu + \rho \kappa^2 y^2 \mathcal{D} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.152)$$

подчеркнув, что это понятие в качестве составного элемента включает в той или иной форме учет взаимодействия между молекулярными и турбулентными процессами переноса; было бы неверно вводить эффективную вязкость как результат простой суперпозиции (сложения) молекулярной и турбулентной вязкостей.

Полное напряжение трения определяется равенством

$$\tau_{xy}^\Sigma = \mu_{\text{эф}} \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho \kappa^2 y^2 \mathcal{D} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (3.153)$$

Переходя в этом уравнении к переменным закона стенки, получим

$$\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right)^2 + \frac{d\varphi}{d\eta} - \frac{\tau_{xy}^\Sigma}{\tau_w} = 0. \quad (3.154)$$

Разрешая уравнение (3.154) относительно $d\varphi/d\eta$, найдем

$$\frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{\sqrt{1 + 4\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D} (\tau_{xy}^\Sigma / \tau_w)} - 1}{2\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D}}. \quad (3.155)$$

Производя формальное интегрирование этого уравнения, получим следующее выражение для профиля скоростей в пристеночной (внутренней) области:

$$\varphi = \int_0^\eta \frac{(\sqrt{1 + 4\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D} (\tau_{xy}^\Sigma / \tau_w)} - 1) d\eta}{2\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D}}, \quad (3.156)$$

где $\tau_{xy}^\Sigma / \tau_w$ приближенно определяются из соотношения (3.147).

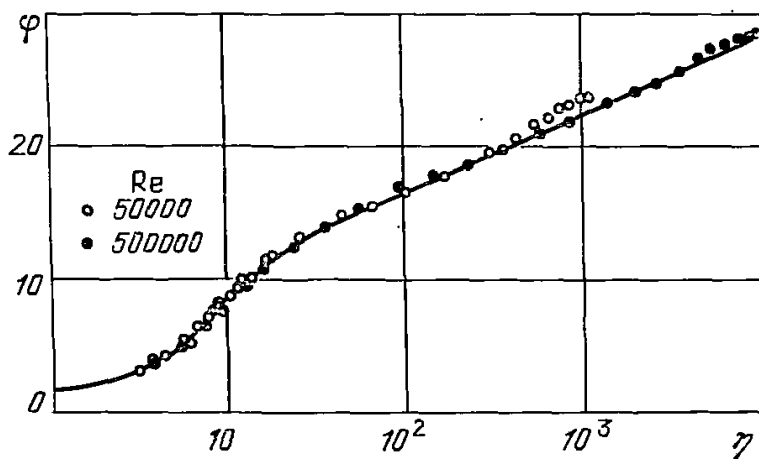


Рис. 3.15. Профили скорости при турбулентном течении в цилиндрической трубе по опытным данным Лауфера

Принимая допущение о постоянстве τ_{xy}^Σ в пристеночной области $\tau_{xy}^\Sigma = \text{const} = \tau_w$, что получается, если в (3.147) $dp/dx = 0$, приведем (3.156) к виду

$$\varphi = \int_0^\eta \frac{(\sqrt{1 + 4\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D}} - 1) d\eta}{2\kappa^2 \eta^2 \mathcal{D}}. \quad (3.157)$$

Здесь $\mathcal{D}$ выражается равенством (3.146). В оригинальной работе Ван-Дриста [333] константа $A_* = 26$ была найдена из сопоставления расчетов по формуле (3.157) с опытными данными Лауфера в цилиндрической трубе, рис. 3.15.

11.4. Гипотезы турбулентности для внешней области турбулентного пограничного слоя. Длительное время для определения турбулентной вязкости во внешней области пограничного слоя широко использовалась формула Прандтля

$$\mu_t = \rho l^2 \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.158)$$

в которой путь перемешивания l предполагался постоянным по се-

чению слоя, пропорциональным толщине слоя, как, например, в модели Эскудиера (3.122). В последние годы предпочтение чаще отдается гипотезе Клаузера [306]. Согласно этой гипотезе турбулентная кинематическая вязкость во внешней области принимается постоянной, пропорциональной характерному размеру пограничного слоя δ^* (δ^* — толщина вытеснения) и среднему значению дефекта скорости $(1/\delta^*) \int_0^\infty (u_e - u) dy$, т. е.

$$\nu_T = k\delta^* \frac{\int_0^\infty (u_e - u) dy}{\delta^*} = k u_e \delta^*, \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) dy. \quad (3.159)$$

Коэффициент пропорциональности k в выражении (3.159) определяется эмпирически. По данным различных авторов $k = 0,0160 \div 0,0180$; чаще других используется значение $k = 0,0168$.

Для учета процессов перемежаемости вблизи границы пограничного слоя нередко в выражение (3.159) вводят определенный Клебановым [307] путем измерений эмпирический коэффициент перемежаемости γ

$$\nu_T = k u_e \delta^* \gamma, \quad (3.160)$$

где

$$\gamma = \left[1 + 5,5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^6\right]^{-1}. \quad (3.161)$$

В форме (3.160) гипотеза Клаузера применяется при расчетах турбулентных пограничных слоев в несжимаемой жидкости и сжимаемом газе, причем в последнем случае δ^* вычисляется так же, как в несжимаемой жидкости, т. е. без учета переменности плотности поперек слоя.

Следует отметить, что допущение о постоянстве пути перемешивания в формуле Прандтля (3.158) и коэффициента турбулентной вязкости в формуле Клаузера в известной степени противоречат друг другу. Однако опыт расчетов турбулентных пограничных слоев при небольших продольных перепадах давления показал, что при соответствующем выборе эмпирических констант формулы Прандтля и Клаузера приводят к близким результатам.

Для оценки возможностей применения гипотезы Клаузера необходимо иметь в виду, что она была сформулирована на основе широких экспериментальных исследований свойств так называемых равновесных турбулентных пограничных слоев. В качестве критерия равновесности, введенного Клаузером, используется условие постоянства параметра β

$$\beta = \frac{\delta^*}{\tau_w} \left| \frac{dp}{dx} \right| = \text{const}. \quad (3.162)$$

Опыт применения формулы Клаузера для описания равновесных или близких к равновесным турбулентных пограничных слоев оказался вполне удовлетворительным, однако попытки использования этой формулы в расчетах существенно неравновесных течений нередко приводили к неудовлетворительному согласованию расчетных и опытных данных. Это обстоятельство обусловило появление некоторых модификаций формулы Клаузера [340—341] (см. также [8]).

Некоторыми исследователями отмечалась неуниверсальность постоянной k в формуле Клаузера при не слишком больших числах Рейнольдса; были предложены эмпирические зависимости этой величины от числа Рейнольдса [342], однако эти зависимости, естественно, не могут быть распространены без должной проверки на условия течения, существенно отличающиеся от тех, в которых были получены эти эмпирические соотношения, тем более если необходимо учесть влияние таких факторов, как сжимаемость, тепло- и массообмен и т. д.

Существенные результаты для понимания характера взаимодействия внутренней и внешней областей, изменения структуры пограничного слоя под влиянием продольного градиента давления и описания процессов переноса во внешней области были получены в работе [343]. В ней на основе теории размерностей и анализа экспериментальных исследований турбулентных пограничных слоев в несжимаемой жидкости при наличии продольных перепадов давления была предложена модификация гипотезы Клаузера (3.160), позволившая установить зависимость турбулентной вязкости от параметра равновесности (3.162) и его производной по продольной координате; показано изменение структуры пограничных слоев в зависимости от этих параметров. Подробное обоснование модифицированной формулы Клаузера будет дано в следующем параграфе, здесь же приведем лишь некоторые формы новой гипотезы турбулентности. Первая из них имеет вид

$$\nu_t = \nu_{t0} \exp\left(-C\beta + C_1 \frac{d\beta}{dx} \delta^*\right). \quad (3.163)$$

Здесь ν_{t0} — турбулентная вязкость по Клаузеру (3.160), β — параметр равновесности Клаузера (3.162), C и C_1 — эмпирические константы: $C = 0,177$, $C_1 = 7,0$, δ^* — толщина вытеснения пограничного слоя (3.159).

Вторая форма той же гипотезы совпадает с исходной формой гипотезы Клаузера (3.160)

$$\nu_t = k_1 u_e \delta^* \gamma, \quad (3.164)$$

с тем, однако, отличием, что в ней эмпирическая постоянная k ($k = 0,0168$) заменена функциональной зависимостью

$$k_1 = k \exp\left(-C\beta + C_1 \frac{d\beta}{dx} \delta^*\right). \quad (3.165)$$

Для равновесных пограничных слоев ($\beta = \text{const}$, $d\beta/dx = 0$) формулы (3.163) и (3.165) упрощаются и принимают соответственно вид

$$v_\tau = v_{\tau 0} \exp(-C\beta), \quad (3.166)$$

$$k_1 = k \exp(-C\beta). \quad (3.167)$$

Оценка возможностей модифицированной формулы Клаузера в сочетании с формулой Прандтля — Ван-Дриста будет дана в следующем параграфе на основе сравнения расчетных и опытных данных.

§ 12. Модификация гипотезы Клаузера для равновесных и неравновесных турбулентных пограничных слоев

12.1. Общие соображения. В ряду нерешенных проблем современной полуэмпирической теории турбулентности проблема описания процессов переноса во внешней области турбулентных пограничных слоев является, по-видимому, наиболее сложной. В подтверждение сказанного достаточно указать на то, что практической основой всех расчетов пограничных слоев на протяжении последних тридцати лет наряду с формулой Прандтля является формула Клаузера (3.160). Оговоримся, что речь пока идет лишь о гипотезах замыкания уравнений для первых моментов (алгебраические модели). Столь длительный срок «эксплуатации» формулы Клаузера кажется тем более удивительным, что трудности в расчете неравновесных течений на основе алгебраических моделей и различного рода интегральных подходов обнаружилось почти 20 лет назад, что подтверждается выводами Стэнфордской конференции 1968 г. [344]. Уже тогда отмечалось, что ни один из существующих подходов (методов) не обеспечивает надежного предсказания положения точки отрыва турбулентного пограничного слоя при больших неблагоприятных перепадах давления. Так или иначе прогресс в этой области оказался крайне замедленным. Тем не менее полученные в эти годы экспериментальные результаты, в частности, результаты исследований когерентных структур, характера распределения параметров турбулентности по сечению слоя, дают основание надеяться на то, что преодоление имеющихся трудностей пойдет более ускоренно. Некоторые выводы, проясняющие отдельные аспекты рассматриваемой проблемы, могут быть сделаны уже сегодня. Важнейшим из них является вывод о том, что характер процессов переноса в турбулентных пограничных слоях определяется взаимодействием крупномасштабных структур внешней области слоя с мелкомасштабными структурами внутренней области.

Напомним, что термин «внешняя» относится к одной из двух областей, на которые условно разделяется течение в пограничном

слое в рамках наиболее часто применяемой в последние годы так называемой двухслойной схемы. Согласно этой схеме, выделяются внутренняя область, включающая в себя вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скоростей, и внешняя область, содержащая область закона следа и область перемежаемости.

Тезис о взаимодействии внутренней и внешней областей слоя включает в себя по необходимости отказ от концепции «замороженности» структуры слоя, лежащей в основе почти всех моделей.

Материализации этого тезиса посвящено последующее содержание параграфа, однако прежде будет полезным для дальнейшего напомнить об условиях сращивания решений на границе внутренней и внешней областей. В качестве условий сращивания обычно используются условия непрерывности напряжений турбулентного трения τ_{xy}^T и турбулентной вязкости ν_t

$$\tau(y_m - 0) = \tau(y_m + 0), \quad \nu_t(y_m - 0) = \nu_t(y_m + 0). \quad (3.168)$$

Здесь y_m — координата границы между внутренней и внешней областями. Первое из условий (3.168) является очевидным, второе представляется естественным. Иногда вместо первого из условий (3.168) используется условие непрерывности производных от скорости по поперечной координате

$$(\partial u / \partial y)_{y_m - 0} = (\partial u / \partial y)_{y_m + 0}. \quad (3.169)$$

Эквивалентность условия (3.169) первому из условий (3.168) следует из формулы Буссинеска (3.116), являющейся основой описания переноса количества движения в турбулентных пограничных слоях при использовании алгебраических моделей.

12.2. Турбулентная вязкость в равновесных пограничных слоях [343]. Понятие равновесного пограничного слоя введено Клаузером применительно к течениям, в которых выполняется условие (3.162).

Условие постоянства безразмерного параметра β означает, что трение на стенке и интегральная толщина пограничного слоя «мгновенно» следуют за изменением внешних условий (dp/dx), что исключает по существу влияние предыстории потока на характеристики пограничного слоя. Очевидно, что использование гипотезы локальности (см. п. 11.3) к описанию процессов переноса во внешней области в этом случае вполне оправдано. Здесь уместно отметить, что локальная по характеру формула Клаузера (3.160) для турбулентной вязкости и предназначалась ее автором лишь для описания равновесных пограничных слоев.

Диапазон изменения параметра β , в котором Клаузер провел измерения характеристик равновесных пограничных слоев, не позволил с полной отчетливостью обнаружить различия между равновесными слоями, соответствующими различным, но постоянным

значениям параметра β . В опытах лишь было отмечено, что эмпирическая постоянная k , входящая в выражение турбулентной вязкости (3.160), изменяется в довольно широких пределах от опыта к опыту, однако оснований для далеко идущих выводов было недостаточно в связи с ограниченностью опытного материала и несовершенством техники измерений. Как указывалось выше, в процессе «эксплуатации» формулы Клаузера многими исследователями факт «непостоянства» или неуниверсальности константы k отмечался неоднократно. В действительности, и это будет показано ниже, формула Клаузера, строго говоря, применима лишь к пограничным слоям, для которых выполняется условие $\beta = 0$, т. е. для безградиентных пограничных слоев ($dp/dx = 0$). Неуниверсальность же константы k явилась следствием немотивированного использования формулы Клаузера в условиях, не вполне соответствующих ее потенциальным возможностям.

Чтобы показать это [343], обратимся к анализу размерностей и некоторым опытным фактам. Размерные параметры, определяющие характер процессов переноса в турбулентном пограничном слое, хорошо известны [325]. Это — напряжение трения на стенке τ_w , продольный перепад давления dp/dx , плотность среды ρ , динамическая вязкость μ , толщина пограничного слоя δ (или ее интегральный эквивалент δ^*). Наконец, в число размерных параметров необходимо включить скорость на внешней границе пограничного слоя u_e . Обычными приемами теории размерностей [345] число размерных параметров можно сократить. В результате будем иметь следующий набор этих параметров: $v_* [v_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}]$, ν ($\nu = \mu/\rho$), $(1/\rho)(dp/dx)$, δ^* и u_e . Из первых четырех параметров можно составить три характерных независимых линейных масштаба пограничного слоя [325]: так называемый градиентный масштаб

$$\delta_p = \frac{\rho v_*^2}{\left| \frac{dp}{dx} \right|} = \frac{\tau_w}{\left| \frac{dp}{dx} \right|}, \quad (3.170)$$

вязкостный масштаб

$$\delta_\nu = \nu/v_*, \quad (3.171)$$

и линейный масштаб всего слоя в целом δ^* .

Использование масштаба u_e не обязательно, однако в этом случае необходимым элементом должен стать закон сопротивления, связывающий коэффициент трения c_f ($c_f = 2\tau_w/\rho u_e^2$) с числом Рейнольдса, построенным по толщине пограничного слоя $Re^* = u_e \delta^*/\nu$.

Нетрудно видеть, что условие постоянства параметра равновесности Клаузера β (3.162) означает условие постоянства отношения двух характерных масштабов слоя, а именно толщины слоя δ^* и градиентного масштаба δ_p , т. е.

$$\beta = \frac{\delta^*}{\delta_p} = \text{const.} \quad (3.172)$$

На плоской пластине $dp/dx = 0$, $\delta_p = \infty$, $\beta = 0$. Этим условиям соответствует относительная протяженность внутренней области $y_m/\delta = 0,2$ (δ — толщина слоя). При больших положительных перепадах давления $(dp/dx) \gg 0$, $\tau_w \rightarrow 0$, $\delta_p \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$. Относительная протяженность внутренней области в этих условиях вследствие ее вырождения стремится к нулю, т. е. $y_m/\delta \rightarrow 0$. Из приведенных предельных оценок структуры пограничного слоя следует, что параметр β является параметром, определяющим относительную протяженность внутренней области, на которую продольный перепад давления непосредственного влияния не оказывает (закон стенки). Иными словами, равновесные пограничные слои, соответствующие различным, но постоянным значениям параметра β ($0 \leq \beta \leq \infty$), отличаются друг от друга относительной протяженностью внутренней области.

Итак, условия $\delta_p \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \infty$, $y_m/\delta \rightarrow 0$ означают вырождение внутренней области. Но исчезновение внутренней области с ростом значений параметра β означает исчезновение области генерации (производства) энергии турбулентности. Напомним, что на внутреннюю область приходится около 80 % производства турбулентной энергии, а на первые 5 % толщины слоя — около 50 % той же величины. Максимум генерации приходится на внешнюю границу переходной области, см. рис. 3.4. Уменьшение генерации энергии турбулентности приводит к падению турбулентной вязкости и, в конечном счете, к обращению ее в ноль для отрывных равновесных пограничных слоев, т. е. $\nu_t \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \infty$.

Отмеченные тенденции в характере изменения турбулентной вязкости во внешней области в зависимости от величины β могут быть описаны формулой

$$\nu_t = \nu_{t0} \exp(-C\beta), \quad (3.173)$$

где ν_{t0} — турбулентная вязкость по Клаузеру (3.160), C — эмпирическая постоянная.

Формула (3.173) отражает поведение ν_t при $0 \leq \beta \leq \infty$. При этом все рассуждения были проведены для положительных перепадов давления ($dp/dx \geq 0$). Вопрос о выборе формы зависимости (3.173) будет подробно рассмотрен в следующем разделе этого параграфа; здесь же отметим, что условие $\nu_t \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow \infty$, разумеется, не следует считать условием реламинаризации. Течение при $\beta \rightarrow \infty$ вследствие вырождения внутренней области и исчезновения из спектра мелкомасштабных вихрей будет представлять собой турбулентное течение с крупномасштабными когерентными структурами.

При отрицательных перепадах давления ($dp/dx \leq 0$) рост $|dp/dx|$ не может привести к бесконечным значениям β , поскольку трение никогда не обращается в ноль. Однако и в этом случае рост β приведет к вырождению внутренней области: сначала логарифмического участка, а затем и переходного. Течение, лишенное

вследствие этого процесса источников генерации турбулентной энергии, из турбулентного перейдет в ламинарное. Иными словами, осуществится реламинаризация турбулентного течения, т. е. при некотором значении β (конечном) ν_t станет меньше ν . Следовательно, вид формулы (3.173) для $dp/dx < 0$ полностью сохранится.

12.3. Структура равновесных пограничных слоев. Проведем анализ структуры равновесных слоев на основе классической (3.160) и модифицированной (3.164) формул Клаузера. Во внутренней области примем гипотезу эффективной вязкости (3.152). Далее обратимся ко второму из условий (3.168). Приравнявая согласно этому условию коэффициенты турбулентной вязкости (3.164) и (3.152) на границе внутренней и внешней областей и имея в виду, что в окрестности этой границы влияние перемежаемости несущественно $\gamma(y_m/\delta) \simeq 1$, получим

$$\nu + \kappa^2 y_m^2 \mathcal{D}(y_m) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=y_m} = k_1 u_e \delta^*. \quad (3.174)$$

Далее, переписывая соотношение (3.174) в переменных закона стенки и принимая во внимание выражение (3.155), будем иметь после простых преобразований

$$\kappa^2 \eta_m^2 \mathcal{D}(\eta_m) \frac{\tau_{xy}^\Sigma(\eta_m)}{\tau_w} = k_1 \text{Re}^* (k_1 \text{Re}^* - 1). \quad (3.175)$$

Здесь $\text{Re}^* = u_e \delta^* / \nu$.

Для дальнейшего важно отметить, что из трех независимых линейных масштабов пограничного слоя δ_v (3.171), δ_p (3.170) и δ^* , помимо безразмерного параметра равновесности β (3.172), можно составить еще один безразмерный параметр

$$S = \frac{\delta_p}{\delta_v} = \frac{\rho v_*^3}{\nu |dp/dx|}. \quad (3.176)$$

Сравнивая параметр S с параметром p_* в выражении для τ_{xy}^Σ/τ_w (3.147), можно видеть, что $p_* = \pm(1/S)$ и, следовательно,

$$\tau_{xy}^\Sigma/\tau_w = 1 \pm \eta/S. \quad (3.177)$$

Знак «+» в (3.177) соответствует $dp/dx > 0$, знак «-» — $dp/dx < 0$.

Демпфирующий множитель $\mathcal{D}$ (3.149) с учетом (3.177) примет вид

$$\mathcal{D}(\eta) = [1 - \exp[-(\eta/A_*) \sqrt{1 \pm \eta/S}]]^2, \quad A_* = 26. \quad (3.178)$$

Учитывая еще выражение для k_1 (3.167), преобразуем равенство (3.175) с учетом (3.177) и (3.178) к виду

$$\eta_m^2 [1 - \exp[-(\eta_m/A_*) \sqrt{1 \pm \eta_m/S}]]^2 = \frac{k \text{Re}^* e^{-C\beta} (k \text{Re}^* e^{-C\beta} - 1)}{\kappa^2 (1 \pm \eta_m/S)}. \quad (3.179)$$

Из приведенного соотношения (3.179) следует, что координата границы внутренней области в переменных закона стенки η_m , характеризующая протяженность внутренней области, зависит от двух определяющих безразмерных параметров пограничного слоя β и S и числа Рейнольдса Re^*

$$\eta_m = \eta_m(\beta, S, Re^*). \quad (3.180)$$

Замечая, что

$$\eta_m = \frac{y_m}{\delta^*} Re^* \sqrt{\frac{c_f}{2}}, \quad \frac{\eta_m}{S} = \frac{y_m}{\delta^*} \beta, \quad c_f = 2 (v_*/u_e)^2, \quad (3.181)$$

приведем (3.179) к форме

$$\begin{aligned} \left(\frac{y_m}{\delta^*}\right)^2 \left\{ 1 - \exp \left[- \left(\frac{y_m}{\delta^*}\right) \frac{Re^*}{A^*} \sqrt{\frac{c_f}{2} \left(1 \pm \frac{y_m}{\delta^*} \beta\right)} \right] \right\} = \\ = \frac{ke^{-C\beta} (k Re^* e^{-C\beta} - 1)}{\kappa^2 Re^{*2} (c_f/2) \left(1 \pm \frac{y_m}{\delta^*} \beta\right)}. \end{aligned} \quad (3.182)$$

Согласно соотношению (3.182), безразмерная координата границы внутренней области y_m/δ^* зависит от трех параметров

$$y_m/\delta^* = f(\beta, Re^*, c_f). \quad (3.183)$$

Соотношение (3.179) позволяет сформулировать условия отрыва и реламинаризации турбулентного пограничного слоя. Если в качестве физических условий отрыва и реламинаризации принять условие исчезновения (вырождения) логарифмического и переходного участков, т. е. принять в качестве границы внутренней области границу вязкого подслоя и переходной области $\eta_m = 5$, то, полагая в (3.179) $\eta_m = 5$, найдем связь параметров β , S и Re^* , приводящую к отрыву и реламинаризации пограничного слоя:

$$25 \{ 1 - \exp [- (5/A_*) \sqrt{1 \pm 5/S}] \}^2 = \frac{k Re^* e^{-C\beta} (k Re^* e^{-C\beta} - 1)}{\kappa^2 (1 \pm 5/S)}. \quad (3.184)$$

После подстановки значений констант ($k = 0,0168$, $\kappa = 0,4$, $A_* = 26$) получим

$$\begin{aligned} (1 \pm 5/S) \left[1 - \exp \left(- \frac{5}{26} \sqrt{1 \pm 5/S} \right) \right]^2 = \\ = 0,0042 Re^* e^{-C\beta} (0,0168 Re^* e^{-C\beta} - 1). \end{aligned} \quad (3.185)$$

Соотношение (3.185) позволяет установить сочетание параметров β , S и Re^* , приводящее к отрыву пограничного слоя (знак «+» перед параметром S) и его реламинаризации (знак «—» перед параметром S).

В том, что с ростом параметра β уменьшается протяженность логарифмического участка, и, следовательно, внутренней области, легко убедиться из следующего простого анализа. На участке логарифмического профиля скоростей $\mathcal{D} = 1$, кроме того, в правой части (3.182) можно пренебречь в числителе единицей по сравнению с первым членом в скобке. В этом случае (3.182) упрощается и принимает вид

$$y_m/\delta^* = (k/\kappa) (c_f/2)^{-1/2} e^{-C\beta}. \quad (3.186)$$

Из этого соотношения следует, что с ростом β протяженность внутренней области уменьшается, поскольку c_f уменьшается гораздо медленнее. При использовании же классической гипотезы Клаузера ($\beta = 0$) по мере приближения к точке отрыва ($c_f \rightarrow 0$) внутренняя область увеличивается, что противоречит установленной в опытах тенденции.

Модифицированная формула Клаузера (3.166) — (3.167) содержит неопределенную пока эмпирическую постоянную C , которую можно в принципе определить из сравнения результатов расчетов с опытными данными по равновесным пограничным слоям при различных значениях $\beta = \text{const}$. К сожалению, таких данных недостаточно, поэтому представляется целесообразным обобщить модифицированную формулу Клаузера на локально неравновесные пограничные слои, т. е. слои, для которых $\beta \neq \text{const}$.

12.4. Локально неравновесные пограничные слои. Модифицированная формула Клаузера может быть обобщена на течения, в которых условие $\beta = \text{const}$ нарушается. Такие слои будем называть локально неравновесными, имея в виду, что для описания таких слоев можно использовать гипотезу Буссинеска, а влияние предыстории течения, т. е. событий, происходящих вверх по потоку, незначительно.

Для этих слоев учет влияния неравновесности может быть сведен к учету влияния локальных производных от параметра β по продольной координате x . Предполагая, кроме того, линейный характер влияния поправок на неравновесность, запишем формулу (3.167) в виде

$$k_1 = k \exp \left(-C\beta + C_1 \frac{d\beta}{dx} \delta^* - C_2 \frac{d^2\beta}{dx^2} \delta^{*2} \right). \quad (3.187)$$

Нетрудно видеть, что учет первой производной $d\beta/dx$ приводит к необходимости вычисления второй производной от давления d^2p/dx^2 , что требует определенной тщательности в обработке опытных данных. Учет второй производной от $\beta(x)$ сопряжен со значительными трудностями в вычислении d^3p/dx^3 и вряд ли может быть рекомендован для широкого практического применения. Поэтому ограничимся в дальнейшем учетом лишь первой производ-

ной от β . В этом случае

$$k_1 = k \exp \left(-C\beta + C_1 \frac{d\beta}{dx} \delta^* \right), \quad k = 0,0168. \quad (3.188)$$

Для проверки обоснованности структуры формулы (3.188) и определения постоянных C и C_1 использовались данные опытов 1100, 1200, 1300, 2100, 2200, 2300, 3300, представленные в [344]. В качестве рабочего метода использовался так называемый обратный метод, сущность которого заключается в том, что в процессе расчета в рамках двухслойной схемы, рассмотренной выше, значение k_1 на каждом шаге интегрирования по продольной координате подбирается таким образом, чтобы расчетное значение коэффициента трения в рассматриваемом сечении совпадало с соответствующим экспериментальным значением. Анализ полученных таким образом распределений $k_1(x)$ для каждого из указанных опытов подтвердил правильность вида зависимости $k_1 = k_1(\beta, d\beta/dx)$

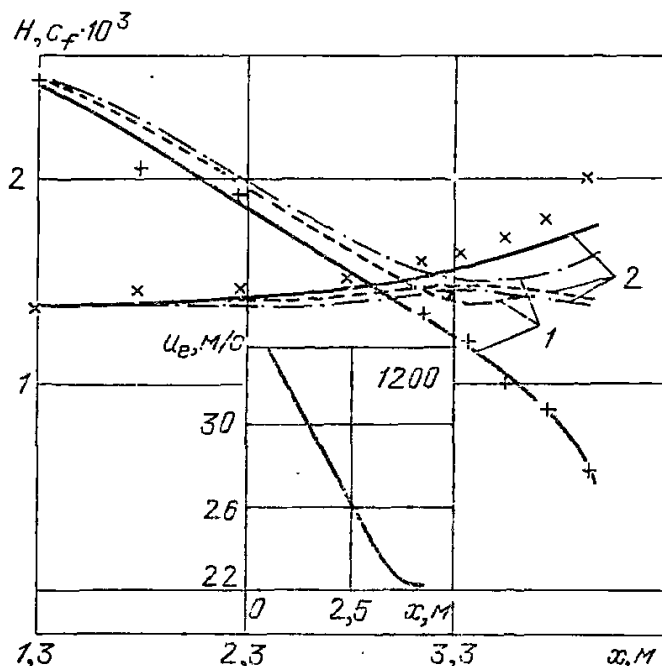


Рис. 3.16. Продольные распределения коэффициента трения c_f (1) и формпараметра H (2) для опыта 1200 [344]: сплошные линии — расчет с использованием (3.188); штриховые — расчет при $k_1 = \text{const} = 0,0168$; штрихпунктирные — расчет по $k-\varepsilon$ -модели [347]; крестики — экспериментальные данные [344]

(3.188). Величины эмпирических констант C и C_1 в (3.188), найденные методом наименьших квадратов, оказались равными

$$C = 0,177, \quad C_1 = 7,0. \quad (3.189)$$

При использовании соотношения (3.188) со значениями постоянных (3.189) в области отрицательных продольных перепадов

давления ($dp/dx < 0$) необходимо иметь в виду, что специально область $dp/dx < 0$, особенно область очень больших отрицательных значений dp/dx , не исследовалась. Значения β , вычисленные по модулю величины dp/dx , в проанализированных выше опытах в области $dp/dx < 0$ были, как правило, невелики, что не позволяет с уверенностью считать формулу (3.188) универсальной вплоть до значительных отрицательных значений dp/dx . Вопрос об универсальности формулы (3.188) при $dp/dx < 0$, так же как вопрос о явлении реламинаризации в сильно конфузорных течениях, еще предстоит рассмотреть.

Результаты расчетов. Рассмотрим некоторые результаты расчетов с использованием соотношения (3.188). Обратимся прежде всего к результатам расчета для условий опыта 1200 (сильный положительный градиент давления), для которого существующие модели турбулентности дают плохие результаты. На рис. 3.16 приведены результаты расчетов местного коэффициента трения c_f и

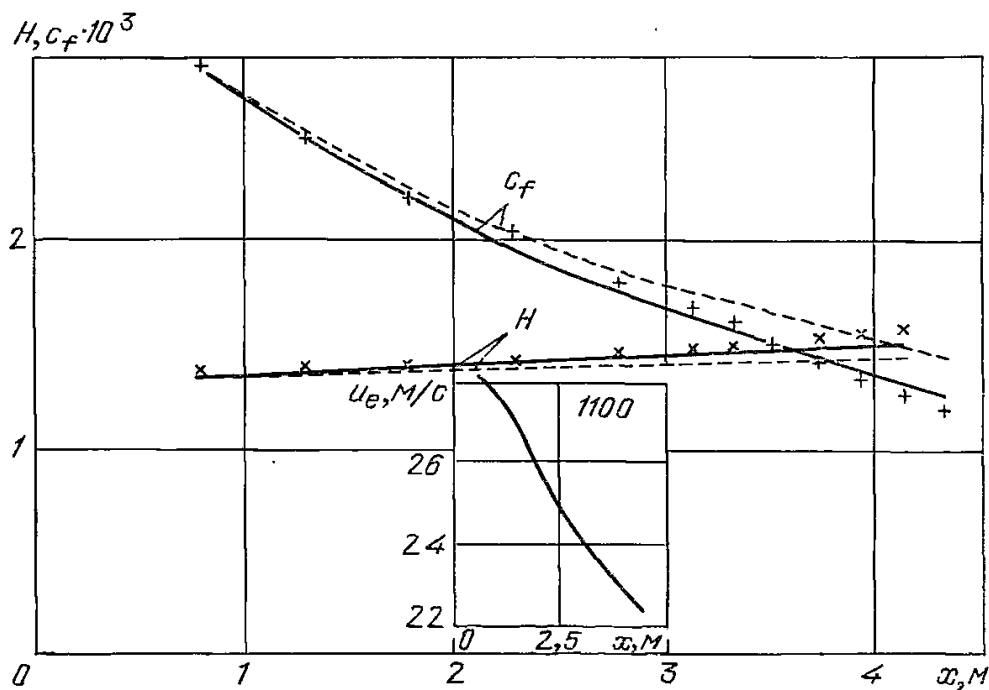


Рис. 3.17. Продольные распределения коэффициента трения c_f и формпараметра H для опыта 1100 [344] (обозначения см. на рис. 3.16)

формпараметра $H = \delta^*/\delta^{**}$ (δ^{**} — толщина потери импульса). Поскольку опыт 1200 был базовым при выборе C и C_1 , совпадение расчетной кривой (сплошной) c_f с экспериментом оказалось абсолютным, в то время как для $k_1 = \text{const} = 0,0168$ различие расчета и опыта в последнем сечении достигает 300%. Сравнение расчетных и опытных данных по формпараметру H показывает, что классическая гипотеза Клаузера ($k_1 = \text{const}$) приводит к погреш-

ности в 30 %, в то время как модифицированная гипотеза Клаузера дает погрешность в 10 %. Самым важным здесь, однако, представляется не повышение точности расчета c_f и H , а достижение качественного согласия в ходе кривых $c_f(x)$ и $H(x)$, чего не дают существующие модели, в том числе $(k - \epsilon)$ -модель (штрихпунктирная кривая на рис. 3.16) из [347].

На рис. 3.17 приведены данные опыта 1100 (умеренный положительный градиент давления). Модифицированная гипотеза Клаузера дает существенно лучшие результаты по c_f и H по сравнению с ее классическим вариантом.

Для опыта 1300 (ускоренный поток) получено полное совпадение c_f , H и профилей скорости при использовании обеих гипотез (модифицированной и классической).

Для опыта 2100 конфузор — пластина — диффузор модифицированная гипотеза дает качественно более правильный результат,

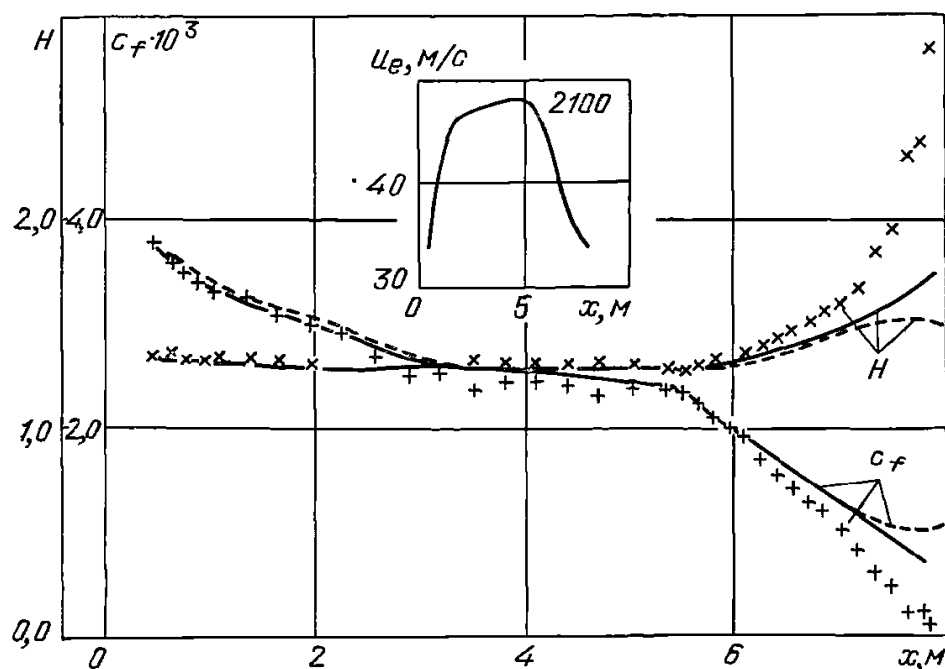


Рис. 3.18. Продольные распределения коэффициента трения c_f и формпараметра H для опыта 2100 [344] (обозначения см. на рис. 3.16)

чем для классического варианта ($k_1 = \text{const} = 0,0168$), однако на большей части диффузора ($x > 6$ м) сохраняется существенное отличие расчета от опыта (рис. 3.18). При этом следует учитывать, что, как отмечается в [344] и работах многих авторов, в частности в [292], для опыта в этой области существенны эффекты трехмерности течения.

При расчетах опыта 2200 (равновесный пограничный слой) модифицированная гипотеза Клаузера привела к худшим результатам по сравнению с классической. Для опыта 2300 (равновесный

пограничный слой; более интенсивно, чем в опыте 2200, замедляющееся течение) модифицированная гипотеза Клаузера привела к очень хорошему совпадению с опытом по профилям скорости и формпараметру H и не слишком хорошему совпадению по трению $c_f(x)$ (различие по c_f до 20 %). Последнее обстоятельство позволяет предположить, что трение в опытах Клаузера определено не очень тщательно.

Таким образом, можно сказать, что предложенная в работе [343] модификация формулы Клаузера (3.188) позволила во всех рассмотренных случаях, кроме опыта 2200, получить результаты,

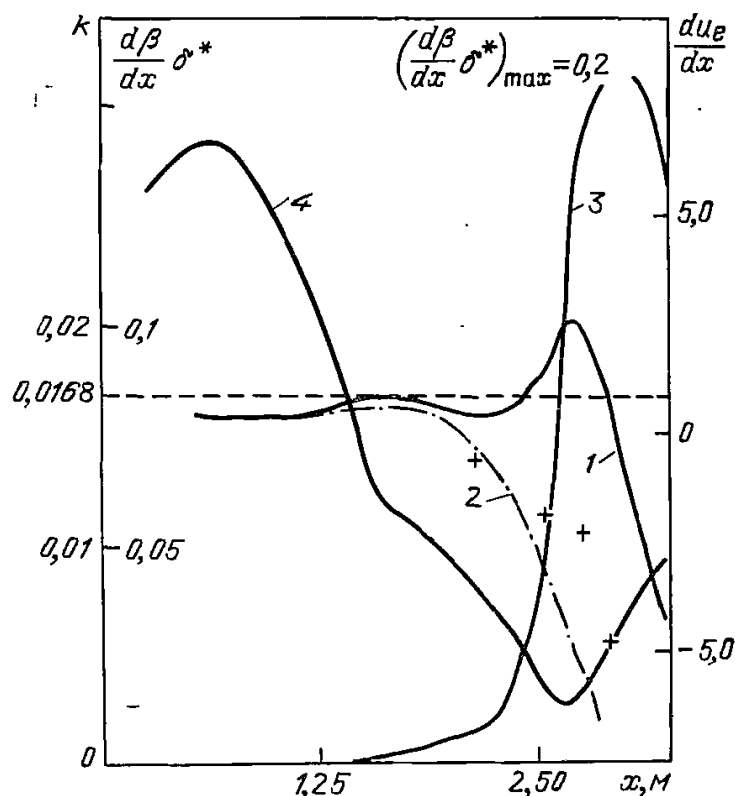


Рис. 3.19. Продольные распределения параметров: крестики — опытные данные по k_1 [346]; 1 — расчет с использованием (3.188); 2 — расчет k_1 с использованием (3.188) при $C_1 = 0$; 3 — распределение $(\frac{d\beta}{dx})\delta^*$; 4 — распределение $\frac{du_e}{dx}$ по [346]

которые качественно и количественно лучше совпадают с опытными данными, чем результаты, полученные с использованием классического варианта той же формулы.

На рис. 3.19, 3.20 приведено сравнение результатов расчетов с использованием формулы (3.188) с опытными данными [346], которые не использовались при получении формулы (3.188). Указанное сравнение представляет особый интерес еще и потому, что исследованный в [346] пограничный слой был существенно неравновесным. Кроме того, в этой работе приводятся данные о макси-

мальных значениях безразмерной вязкости k_1 , непосредственно полученных в предотрывной области.

Обратимся к рис. 3.19, на котором приведены распределения величины k_1 . Помимо того, на рис. 3.19 изображены кривые распределения градиента скорости во внешнем потоке (du_e/dx) и параметра неравновесности $(d\beta/dx)\delta^*$. Сравнение сплошной и штриховой кривых с опытными данными показывает, что предложенная

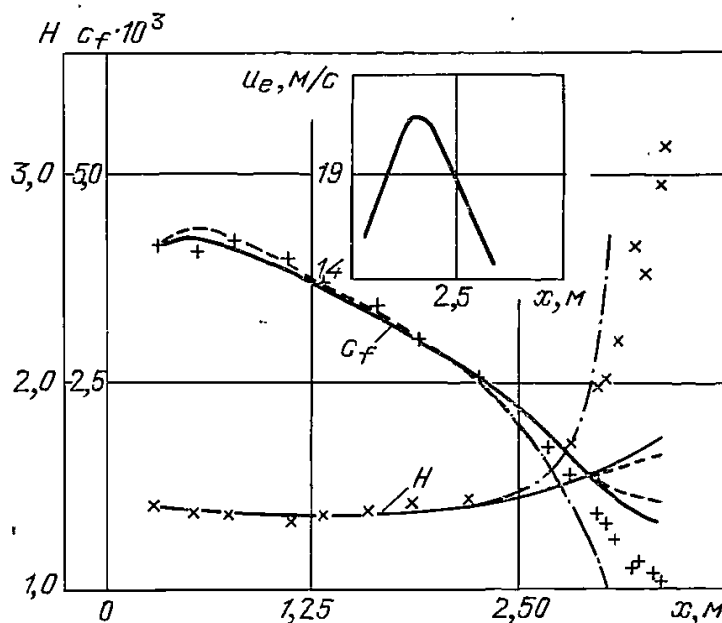


Рис. 3.20. Продольные распределения коэффициента трения c_f и формпараметра H : прямые крестики — опыты по c_f [346]; наклонные крестики — опыты по H [346]; сплошные линии — расчет с использованием (3.188); штриховые — расчет при $k_1 = \text{const} = 0,0168$; штрихпунктирные — расчет с использованием (3.188) при $C_1 = 0$

модификация (3.188) качественно правильно описывает опытные данные даже в условиях очень сильной неравновесности, о чем свидетельствует резкий рост параметра неравновесности (кривая 3).

Ясно, что учет неравновесности в подобных условиях не может быть в полной мере осуществлен лишь на основе учета производной $d\beta/dx$. В подтверждение сказанного проведен расчет с использованием формулы (3.188), в которой коэффициент C_1 принят равным нулю (штрихпунктирная кривая 2). «Вилка», образованная кривыми 1 и 2, внутри которой лежат опытные точки, свидетельствует о том, что, если учесть вторую производную $d^2\beta/dx^2$, то опыты [346] можно описать с хорошей точностью.

На рис. 3.20 приведено сравнение результатов расчетов коэффициента трения C_f и формпараметра H с данными [346]. Расчеты с использованием (3.188) дают качественно и количественно лучшие результаты, чем классическая формула Клаузера.

Приведем данные о распределении безразмерной вязкости (рис. 3.21, б) и безразмерной границы внутренней области (рис. 3.21, а), полученные расчетным путем с использованием (3.188) для условий опытов 1200, 1100, 2100. Штриховые кривые

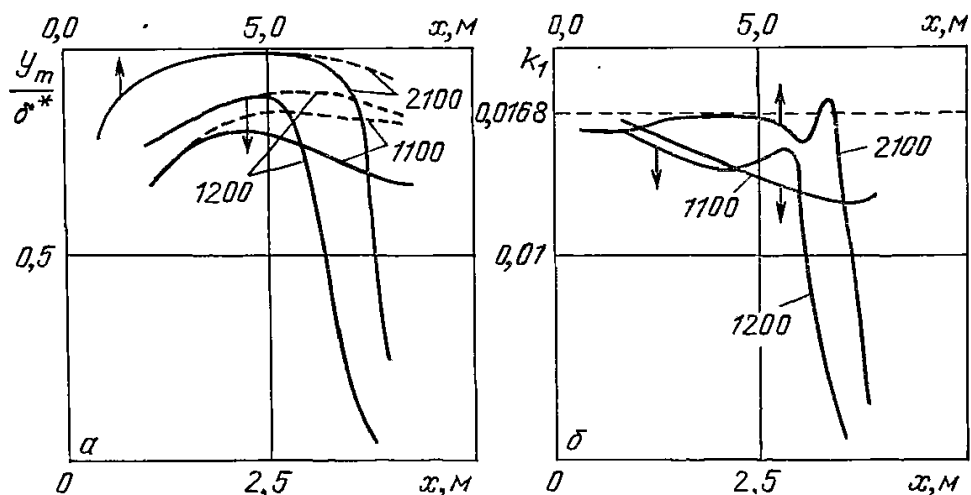


Рис. 3.21. Продольное изменение безразмерной границы внутренней области y_m/δ^* и безразмерной турбулентной вязкости k_1 в опытах 1200, 1100, 2100 [344]; сплошные линии — расчет с использованием (3.188); штриховые — расчет с $k_1 = \text{const} = 0,0168$

на рис. 3.21 получены при использовании формулы Клаузера (3.160). Приведенные данные характеризуют изменение структуры пограничного слоя и уровня турбулентной вязкости в различных турбулентных пограничных слоях.

§ 13. Полуэмпирические гипотезы турбулентности для замыкания уравнений для вторых моментов

13.1. Общие соображения. В основе полуэмпирической теории Прандтля и ее многочисленных модификаций, некоторые из которых были рассмотрены выше, лежит гипотеза локальности механизма турбулентного переноса, согласно которой принимается, что турбулентные напряжения зависят только от локальной структуры осредненного течения. Эта гипотеза оказалась эффективной для описания равновесных течений и локально неравновесных течений, однако для существенно неравновесных течений, в которых структура осредненного течения не соответствует внутренней структуре турбулентности, применение гипотезы локальности оказывается тем менее оправданным, чем больше степень этого несоответствия. Это обстоятельство указывает на необходимость установления связей между компонентами тензора турбулентных напряжений и локальными параметрами турбулентности, поскольку можно ожидать, что равновесие внутренней структуры турбулентности уста-

навливается быстрее, чем равновесие между турбулентностью и осредненным течением.

Приведенные соображения стали исходной предпосылкой для разработки полуэмпирических теорий турбулентности в несжимаемой жидкости на основе использования уравнений для вторых моментов, в частности, уравнений кинетической энергии турбулентности и уравнений рейнольдсовых напряжений (вывод этих уравнений приводится в п. 9.2 § 9). Из рассмотрения этих уравнений ((3.79) и (3.74)) следует, что они не могут быть непосредственно использованы, поскольку содержат ряд неизвестных членов. Для замыкания этих уравнений необходимо, как обычно в полуэмпирической теории турбулентности, выразить неизвестные члены через некоторый набор определяющих параметров так, чтобы число уравнений соответствовало числу этих параметров. Возможности для более или менее обоснованного установления таких связей оказались чрезвычайно многообразны, что привело в конечном счете к разработке очень большого числа моделей подобного рода.

Фундаментальную роль в теории турбулентности, основанной на использовании уравнений для вторых моментов, сыграли работы А. Н. Колмогорова [348] и Прандтля, Вигхардта [349], в которых была предложена гипотеза, связывающая кинематический аналог турбулентной вязкости $\nu_T = \mu_T/\rho$ и кинетическую энергию турбулентности $k = \frac{1}{2} \overline{\rho v_k'' v_k''}$

$$\nu_T = c_\mu \sqrt{k}/\rho L. \quad (3.190)$$

Здесь L — интегральный масштаб турбулентности, c_μ — эмпирическая постоянная. Нетрудно видеть, что соотношение (3.190) может быть получено при некоторых допущениях на основе соображений размерности.

13.2. Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности. Обратимся прежде всего к уравнению переноса кинетической энергии турбулентности в форме (3.79). Оценки, приведенные в монографии В. М. Иевлева [299], показали, что второй член в правой части, т. е. $\rho \partial v_k''/\partial s_k$, является существенным только при больших сверхзвуковых скоростях, когда пульсационная скорость по порядку величины близка к скорости звука. В несжимаемой жидкости и при умеренных сверхзвуковых скоростях указанным членом можно пренебречь. Анализ и оценки третьего, так называемого диссипативного члена в правой части уравнения (3.79) [299], показывают, что этот член приближенно можно представить в форме

$$\overline{\tau_{jk} \frac{\partial v_k''}{\partial s_j}} = \frac{1}{2} \mu \overline{\left(\frac{\partial v_j''}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} \right)^2}. \quad (3.191)$$

Имея в виду отмеченные обстоятельства и несколько преобразуя третий член в квадратных скобках в (3.79), приведем это

уравнение к виду

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_j k) = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[-\overline{v_j'' k'} - \overline{v_k'' p} + \mu \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{k}{\rho} \right) \right] - \\ - \frac{1}{2} \mu \overline{\left(\frac{\partial v_j''}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} \right)^2} - \overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial v_k}{\partial s_j}. \quad (3.192)$$

Здесь k' выражается вторым из равенств (3.76).

Уравнение переноса кинетической энергии турбулентности в форме (3.192) является исходным во многих исследованиях турбулентных течений.

В основополагающей работе А. Н. Колмогорова [348] была принята гипотеза о градиентном механизме турбулентной диффузии. Применительно к течениям несжимаемой жидкости диффузионные члены в уравнении (3.192) были представлены в виде

$$-\overline{v_j'' k'} - \overline{v_k'' p} = \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial s_j}. \quad (3.193)$$

Здесь σ_k — эмпирическая постоянная.

Последний член в правой части уравнения (3.192), описывающий возникновение (исчезновение) кинетической энергии турбулентности за счет рейнольдсовых напряжений в осредненном потоке со сдвигом, с учетом гипотезы Буссинеска (3.115) может быть представлен в виде

$$-\overline{\rho v_j'' v_k''} \frac{\partial v_k}{\partial s_j} = \rho \nu_T \left(\frac{\partial v_k}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_k} \right) \frac{\partial v_k}{\partial s_j}, \quad (3.194)$$

$$-\overline{\rho v_j'' v_k''} = \rho \nu_T \left(\frac{\partial v_k}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_k} \right). \quad (3.195)$$

Кроме того, введем обозначение

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \nu \overline{\left(\frac{\partial v_j''}{\partial s_k} + \frac{\partial v_k''}{\partial s_j} \right)^2}. \quad (3.196)$$

Используя равенства (3.193), (3.194) и (3.196), приведем уравнение (3.192) к виду

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_j k) = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[\mu \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{k}{\rho} \right) + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial s_j} \right] + \rho \nu_T \left(\frac{\partial v_k}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_k} \right) \frac{\partial v_k}{\partial s_j} - \rho \varepsilon. \quad (3.197)$$

Скорость диссипации энергии турбулентности ε в соответствии с гипотезой А. Н. Колмогорова [348] выражается при больших числах Рейнольдса через кинетическую энергию турбулентности и

интегральный масштаб L соотношением

$$\varepsilon = c_D k^{3/2} / \rho L. \quad (3.198)$$

Здесь c_D — эмпирическая постоянная.

В случае стационарного плоского движения в пограничном слое уравнение (3.197) упрощается и принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (uk) + \frac{\partial}{\partial y} (vk) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\rho} \right) + \frac{v_T}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \\ + \rho v_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} v \left(\frac{\partial u''}{\partial y} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.199)$$

Принятое в соответствии с (3.198) описание диссипации кинетической энергии турбулентности, т. е. превращения этой энергии в тепло благодаря действию молекулярной вязкости, как отмечалось выше, справедливо лишь при больших числах Рейнольдса. В этом случае процессом, определяющим скорость диссипации, будет не сам процесс собственно диссипации, т. е. процесс превращения кинетической энергии «мелкомасштабных вихрей» в тепло, а процесс переноса энергии последовательно от «больших вихрей» к «меньшим». Этот каскадный процесс, как можно предполагать, зависит лишь от величин ρ , L , k и не зависит от вязкости. При указанных предположениях соображения размерности приводят к аппроксимации (3.198).

Используя гипотезу Колмогорова — Прандтля (3.190) о связи кинематического коэффициента турбулентной вязкости и кинетической энергии турбулентности, преобразуем уравнение (3.197) с учетом (3.198) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s_j} (v_j k) = \frac{\partial}{\partial s_j} \left[\mu \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{k}{\rho} \right) + \frac{c_\mu}{\sigma_k} V \bar{k} L \frac{\partial k}{\partial s_j} \right] + \\ + \rho c_\mu V \bar{k} L \left(\frac{\partial v_h}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_h} \right) \frac{\partial v_h}{\partial s_j} - c_D k^{3/2} / L. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Аналогичным образом преобразуем уравнение (3.199). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (uk) + \frac{\partial}{\partial y} (vk) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\rho} \right) + \frac{c_\mu}{\sigma_k} V \bar{k} L \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \\ + \rho c_\mu V \bar{k} L \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_D k^{3/2} / L. \end{aligned} \quad (3.201)$$

Значения эмпирических констант c_μ , σ_k и c_D , принятые в работе Лаундера — Сполдинга [321], равны $\sigma_k = 1$, $c_\mu \cdot c_D = 0,09$. Если исключить из формулы Колмогорова — Прандтля (3.190) интегральный масштаб L с помощью равенства (3.198), то получим соотношение, связывающее коэффициент турбулентной вязкости ν_T , ки-

нетическую энергию турбулентности k и скорость диссипации энергии ε :

$$\nu_T = c_D \cdot c_\mu k^2 / \rho \varepsilon. \quad (3.202)$$

Из этой формулы видно, что значение имеет произведение постоянных $c_D c_\mu$, а не каждая из этих величин в отдельности.

Для использования уравнений (3.200) или (3.201) необходимо задание интегрального масштаба турбулентности. В наиболее простых моделях для определения этого масштаба использовалось допущение об адекватности этого масштаба пути смешения, определяемого по формулам типа формулы Прандтля. Впервые такая модель не без успеха была применена к расчету турбулентного пограничного слоя на пластине Г. С. Глушко [350]. Дальнейшее развитие модели подобного рода получили в работах Н. И. Акатнова, А. П. Кузнецова [351], Н. И. Акатнова, В. Ф. Тульверта [352] и др.

В более сложных моделях вместо «алгебраических» выражений для масштаба турбулентности используются дифференциальные уравнения для определения этой величины (двупараметрические модели: Ротта [353], Г. С. Глушко [354, 355] и др.).

В работах Коважного [356], Ни и Коважного [357], А. Н. Секундова [358] вместо соотношений для интегрального масштаба турбулентности было предложено использовать уравнения для турбулентной вязкости, выведенные из тех или иных соображений.

В ряде работ, преимущественно в работах Брэдшоу и его сотрудников [359, 360], была предложена полуэмпирическая модель, основанная на использовании уравнения для турбулентного трения. Эта модель, первоначально сформулированная для течений несжимаемой жидкости, была обобщена на течения сжимаемого газа в работе Брэдшоу [361].

Однако наибольшее распространение при расчете пристенных течений получила двупараметрическая модель, в которой вместо уравнения для масштаба турбулентности используется уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности ε (3.82). Семейство указанных моделей получило наименование $k - \varepsilon$ -моделей турбулентности. Особенности этих моделей применительно к пристенным течениям в пограничных слоях будут рассмотрены подробно в п. 13.4. Здесь же коснемся некоторых аспектов моделирования отдельных членов уравнения (3.82).

13.3. Уравнение для скорости диссипации энергии турбулентности. Использование в качестве второго параметра скорости диссипации ε вместо масштаба турбулентности L , с которым эта величина связана соотношением (3.198), дает ряд практических преимуществ. При больших числах Рейнольдса, когда турбулентность в окрестности стенки можно считать приближенно локально изотропной, скорость диссипации оказывается равной произведению молекулярной вязкости на дисперсию пульсации вихря. Из

уравнения Навье — Стокса можно строго получить уравнение для пульсации вихря. Для этого результат дифференцирования проекций уравнения Навье — Стокса на ось s_k по переменной s_j умножается на $\partial v_k / \partial s_k$ и затем осредняется по правилам Рейнольдса. Указанная процедура была реализована для течений несжимаемой жидкости; уравнение (3.82) является конечным результатом этой процедуры. Очевидно, что уравнение диссипации может быть получено и для течений газа с переменной плотностью, однако до сих пор опыт применения уравнения для скорости диссипации в потоках газа ограничивается использованием уравнения (3.82).

Для замыкания этого уравнения необходимы модельные представления отдельных его членов, входящих в правую часть. Для диффузионного члена обычно принимается градиентное представление [362]

$$-\overline{v_j \varepsilon'} = \frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_j}. \quad (3.203)$$

Здесь σ_ε — эмпирическая постоянная.

Второй и третий члены уравнения (3.82), описывающие генерацию и диссипацию завихренности, обычно моделируют одновременно [362], поскольку они оба стремятся к бесконечности при $Re \rightarrow \infty$, а их разность остается конечной величиной. Наиболее часто используется следующее модельное представление этих членов [362]:

$$-2\nu \overline{\frac{\partial v_k''}{\partial s_k} \frac{\partial v_i''}{\partial s_j} \frac{\partial v_i''}{\partial s_j}} - 2 \overline{\left(\nu \frac{\partial^2 v_i''}{\partial s_j^2} \right)^2} = c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_T \left(\frac{\partial v_k}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_k} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3.204)$$

Здесь $c_{\varepsilon 1}$, $c_{\varepsilon 2}$ — эмпирические постоянные.

Используя представления (3.203) и (3.204), преобразуем уравнение (3.82) к следующему виду:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_j} = \frac{\partial}{\partial s_j} \left(\frac{v_T}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_j} \right) + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} v_T \left(\frac{\partial v_k}{\partial s_j} + \frac{\partial v_j}{\partial s_k} \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (3.205)$$

Уравнение (3.205) играет роль базисного уравнения для многочисленного семейства $(k - \varepsilon)$ -моделей. Приведем стандартные значения эмпирических постоянных, входящих в это уравнение: $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $c_{\varepsilon 1} = 1,44$; $c_{\varepsilon 2} = 1,92$.

Уравнение (3.205) может быть использовано для описания развитых турбулентных течений, т. е. течений, на которых не сказываются вязкостные, пристеночные эффекты. Применительно к турбулентному пограничному слою это означает, что уравнение (3.205) можно применять к области течения, лежащей вне вязкого подслоя и переходной области. Это обстоятельство стало стимулирующим в создании приемов, заключающихся в использовании так называемых пристеночных функций, которые позволяют снести

граничные условия с поверхности в точки, расположенные вне области влияния вязкости. В этом случае надобность в непосредственном моделировании влияния вязкости, естественно, не возникает.

Сущность введения пристеночных функций применительно к $(k - \varepsilon)$ -модели сводится к заданию скорости, кинетической энергии турбулентности и скорости диссипации в некоторой точке C , расположенной в области логарифмического профиля скоростей [347]:

$$\frac{u_C}{v_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[E \frac{y_C v_*}{\nu} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y_C}{\rho v_*^2} \frac{dp}{dx} \right)^{1/2} \right], \quad (3.206)$$

$$k_C = c_\mu \frac{1}{2} \frac{\tau_C}{\rho}, \quad \varepsilon_C = k_C^{3/2} / (c_\mu^{1/4} \kappa y_C).$$

Здесь индексом C обозначены параметры в точке C , $c_\mu = 0,09$, $\kappa = 0,4$, $E = 7,7$ — константа закона стенки, y_C — расстояние от поверхности до точки C .

Из анализа структуры пограничных слоев при сильных продольных перепадах давления, проведенного в § 12, следует, что использование пристеночных функций может быть успешным лишь при небольших продольных перепадах давления; явления отрыва и реламинаризации, естественно, не могут быть описаны с помощью рассматриваемого приема; также не могут быть описаны течения при малых и переходных числах Рейнольдса, трехмерные течения. Здесь уместно отметить, что широко используемый в зарубежной литературе термин «модели турбулентности для малых чисел Рейнольдса» означает по существу моделирование вязкостных эффектов в пристеночной области. Термин «малые числа Рейнольдса» включает не только действительно малые (умеренные) числа Рейнольдса, при которых реализуются переходные режимы течения и течения с недоразвитой турбулентностью, но и течения при больших числах Рейнольдса в окрестности стенки, где локальные числа Рейнольдса v_τ/ν невелики.

13.4. Экспериментальные данные о характеристиках турбулентности вблизи стенки. Оценка эффективности тех или иных моделей турбулентности так или иначе основывается на их сравнении с опытными данными. К сожалению, объем данных, касающихся поведения кинетической энергии турбулентности, турбулентных напряжений трения и скорости диссипации в окрестности стенки существенно ограничен, а большая часть имеющихся данных относится к пограничным слоям на плоских пластинах или к развитым турбулентным течениям в трубах. Рассмотрим последовательно опытные данные по упомянутым характеристикам турбулентности [363].

На рис. 3.22, *a* приведены данные измерений кинетической энергии турбулентности $k_* = k/\rho v_*^2$ во внутренней области пограничного

слоя, представленные в обзоре Коулса [365]. По оси абсцисс отложена переменная закона стенки $\eta = yv_*/\nu$. Диапазон изменения η охватывает вязкий подслой, переходную область и логарифмический участок. Из рисунка видно, несмотря на большой разброс опытных данных (заштрихованная область), что k_* достигает

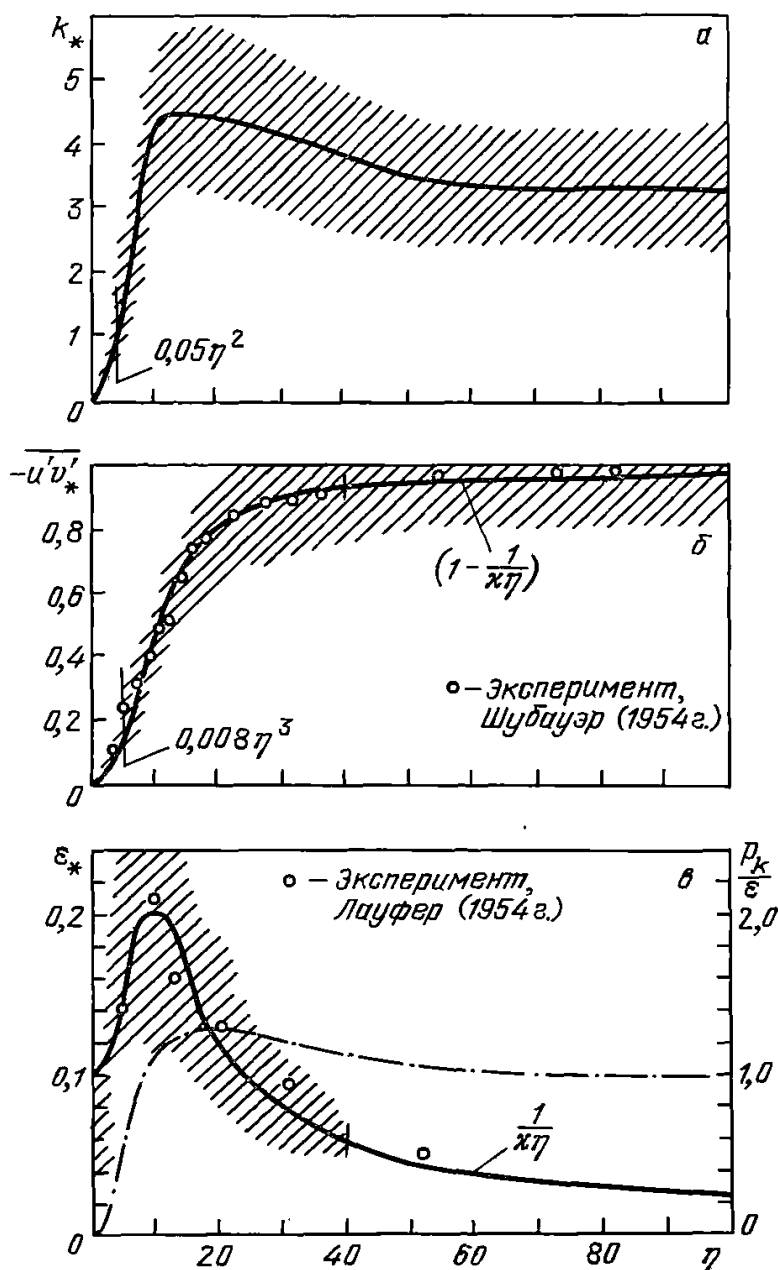


Рис. 3.22. Распределения характеристик турбулентности в пристеночной области: а) кинетическая энергия турбулентности; б) рейнольдсово напряжение $-\overline{u'v'_*}$; в) скорость диссипации ϵ_*

максимального значения при $\eta = 15$. Средняя величина максимума k_* составляет 4,5. В интервале $60 < \eta < 150$ кинетическая энергия оказывается примерно постоянной, равной 3,3. Поскольку в логарифмическом

логарифмической области на пластине $-\overline{u'v'} = \text{const} = v_*^2$, то из этих данных следует, что отношение турбулентного напряжения $-\overline{u'v'}$ к кинетической энергии турбулентности равно приблизительно 0,3, т. е. $-\overline{u'v'}/k = 0,3$. В окрестности стенки

$$k_* = A\eta^2 + B\eta^3 + \dots, \quad (3.207)$$

где $A = 0,025 \div 0,050$.

На рис. 3.22, б представлены опытные данные [365] по распределению безразмерного касательного турбулентного напряжения $-\overline{u'v'}/v_*^2$ вблизи стенки. Здесь же приведены опытные данные Шубауэра [364]. Из рисунка видно, что в логарифмической области турбулентное трение меняется в соответствии с зависимостью

$$-\overline{u'v'} = 1 - 1/(\kappa\eta). \quad (3.208)$$

В непосредственной окрестности стенки турбулентное трение убывает по закону третьей степени.

На рис. 3.22, в изображена безразмерная скорость диссипации $\varepsilon_* = \nu\varepsilon/v_*^4$, $\varepsilon = \nu(\partial v_j''/\partial s_j)^2$ вблизи стенки по опытным данным Лауфера [305] и данным обзора Коулса [365]. В логарифмической области $30 < \eta < 100$ скорость генерации энергии турбулентности k и скорость ее диссипации приблизительно равны друг другу. По определению скорость генерации равна $-\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y}$. Вычисляя $\partial u/\partial y$ из логарифмического профиля $\partial u/\partial y = v_*/\kappa y$ и используя оценку $-\overline{u'v'} = v_*^2$, найдем, что

$$\varepsilon_* = \frac{\bar{\nu}\varepsilon}{v_*^4} = \frac{1}{\kappa\eta}. \quad (3.209)$$

На рис. 3.22, в при $\eta > 40$ показана кривая $\varepsilon_* = 1/(\kappa\eta)$. В непосредственной окрестности стенки распределение ε_* [366] представляется в виде

$$\varepsilon_* = 2(A + 2B\eta + \dots). \quad (3.210)$$

Коэффициент A , как отмечалось выше, меняется в интервале $0,025 \div 0,050$. Следовательно, $0,05 < \varepsilon_{*w} < 0,10$, причем более высокие значения ε_w реализуются, по-видимому, при больших числах Рейнольдса.

Если предположить, что $B = 0$, то из соотношения (3.210) следует граничное условие для ε_*

$$\frac{\partial \varepsilon_*}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0. \quad (3.211)$$

Используя градиент скорости $d\varphi/d\eta$ из равенства (3.155) при $\tau_{xy}^\Sigma = \tau_w$, значения рейнольдсовых напряжений $-\overline{u'v'}$ на рис. 3.22, б и опытные данные Лауфера для ε , можно определить отношение

скорости генерации $P_k = -\overline{u'v'} \frac{\partial u}{\partial y}$ к скорости диссипации ε . Это отношение P_k/ε показано на рис. 3.22, в, при этом в логарифмической области это отношение оказалось равным единице, что свидетельствует о локальном равновесии в этой области.

13.5. Двупараметрические $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентного пограничного слоя. Семейство $(k - \varepsilon)$ -моделей турбулентного пограничного слоя, как отмечалось выше, весьма многочисленно.

Применительно к стационарным двумерным пограничным слоям в несжимаемой жидкости система уравнений для k и ε , используемая в различных моделях, может быть записана в обобщенном виде

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, \quad (3.212)$$

$$u \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial y} \right] + c_{\varepsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\varepsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + E, \quad (3.213)$$

$$\nu_T = -\overline{u'v'}/(\partial u/\partial y), \quad (3.214)$$

$$\nu_T = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}}, \quad (3.215)$$

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + D, \quad (3.216)$$

$$R_T = k^2/\nu \tilde{\varepsilon}, \quad (3.217)$$

$$R_y = \sqrt{k} y/\nu. \quad (3.218)$$

Приведенная обобщенная форма уравнений $(k - \varepsilon)$ -моделей отличается от базисного уравнения для скорости диссипации (3.205) добавлением члена, учитывающего вязкую диффузию ε , введением функций f_1 и f_2 в последние два члена базисного уравнения (3.205), учитывающих в общем случае вязкостные, пристеночные эффекты, а также включением дополнительных членов, обозначаемых через D и E ; $(k - \varepsilon)$ -модели, предложенные разными авторами, отличаются друг от друга видом функций f_1 и f_2 , дополнительными членами D и E , а также значениями некоторых эмпирических констант.

В обзорной работе Пейтела, Роди, Шойрера [363] были подвергнуты детальному, тестовому анализу семь разновидностей $(k - \varepsilon)$ -моделей. В качестве тестовых были выбраны экспериментально исследованные течения в пограничном слое плоской пластины [367], в равновесных пограничных слоях с положительным градиентом давления [368], в пограничных слоях с сильными отрицательными, вызывающими реламинаризацию течения градиентами

давления [369] — [371], а также пограничные слои в течении около стока [372]. Три из семи рассматриваемых моделей были «отбракованы» на начальном этапе как не прошедшие первых тестов, остальные четыре были подвергнуты детальному анализу.

В число четырех перспективных вошли модели Лаундера и Шармы [373], Чжена [374], Лэма и Брэмхорста [375], а также Уилкокса и Рубезина [376]. Причем в последней работе вместо уравнения для ε было использовано уравнение переноса так называемой псевдозавихренности

$$\omega = \varepsilon / (c_\mu k). \quad (3.219)$$

Система уравнений, описывающая $(k - \omega)$ -модель Уилкокса — Рубезина, имеет вид

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + \nu_T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_\mu k \omega, \quad (3.220)$$

$$u \frac{\partial \omega^2}{\partial x} + v \frac{\partial \omega^2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega^2}{\partial y} \right] + c_{\omega 1} f_1 \omega \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - c_{\omega 2} \omega^3 + E, \quad (3.221)$$

$$\nu_T = f_\mu (k/\omega), \quad (3.222)$$

$$l = \sqrt{k}/\omega, \quad (3.223)$$

$$R_T = \sqrt{k} l / \nu. \quad (3.224)$$

Отметим, что, в отличие от ранее введенного определения $k = \overline{v''^2} / \rho v_{jj}$, в рассматриваемых моделях $k = \overline{v''^2} / v_{jj}$, $\varepsilon = \nu (\partial v''_j / \partial s_j)^2$.

Постоянные и функции в трех $(k - \varepsilon)$ -моделях турбулентности приведены в табл. 3.1; те же данные для $(k - \omega)$ -модели Уилкокса — Рубезина представлены в табл. 3.2.

Прежде чем переходить к результатам расчетов и сравнению их с опытными данными, отметим некоторые особенности рассматриваемых моделей.

Прежде всего во всех трех $(k - \varepsilon)$ -моделях используется в качестве переменной не скорость диссипации ε , а диссипативная переменная $\tilde{\varepsilon}$, впервые введенная в работе Джонса — Лаундера [377] из соображений удобства. Величина D , составляющая отличие $\tilde{\varepsilon}$ и ε , выбрана таким образом, что на стенке обеспечивается нулевое граничное условие для $\tilde{\varepsilon}$, а именно $\tilde{\varepsilon}_w = 0$. Однако выражения для D в разных моделях отличаются друг от друга (табл. 3.1). Тем не менее все они обеспечивают правильное выражение для ε на стенке, а именно значение $2A$ в соответствии с уравнением (3.210). Подробный анализ преимуществ и недостатков того или иного

Таблица 3.1

Модель	Обозначение	D	$\tilde{\varepsilon}_w$	c_μ	$c_{\varepsilon 1}$	$c_{\varepsilon 2}$	σ_k	σ_ε	f_μ	f_1	f_2	E
Стандартная		0	пристеночные функции	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	1,0	1,0	1,0	
Лаундер — Шарма		$2\nu \left(\frac{\partial V/\bar{k}}{\partial y} \right)^2$	0	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	$\exp \left[\frac{-3,4}{(1 + R_T/50)^2} \right]$	1,0	$1 - 0,3 \times \exp(-R_T^2)$	$2\nu \nu_T \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$
Чжен		$k \frac{\nu}{y^2}$	0	0,09	1,35	1,8	1,0	1,3	$1 - \exp(-0,0115\eta)$	1,0	$1 - 0,22 \times \exp \left(-\frac{R_T^2}{6} \right)$	$-2\nu \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{y^2} \right) \times \exp(-0,5\eta)$
Лэм — Бремхорст		0	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0$	0,09	1,44	1,92	1,0	1,3	$[1 - \exp(-0,0165R_T)]^2 \times \left(1 + \frac{20,5}{R_T} \right)$	$1 + \left(\frac{0,05}{f_\mu} \right)^3$	$1 - \exp(-R_T^2)$	0

Таблица 3.2

Модель	Обозначение	c_μ	$c_{\omega 1}$	$c_{\omega 2}$	σ_k	σ_ω	f_μ	f_1	E
Уилкокс — Рубезин	УР	0,09	1,41	0,15	2,0	2,0	$1 - 0,992 \exp(-R_T)$	$1 - 0,992 \exp \left(-\frac{R_T}{2} \right)$	$-\frac{2}{\sigma_\omega} \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 \omega^3$

выбора переменной (ϵ или $\tilde{\epsilon}$) содержится в обзоре [363], там же приводятся соображения о выборе и роли эмпирических постоянных в различных моделях.

Важную роль в рассматриваемых моделях играет функция f_μ , предназначенная для описания прямого влияния молекулярной вязкости на касательные напряжения в окрестности стенки. Однако, как правило, с помощью этой функции моделируют не только влияние вязкости, но и эффект уменьшения касательных напряжений под действием пульсаций давления, генерирующих корреляции давления со скоростями деформаций [378]. В работе [363] проведено сравнение функции f_μ с ее экспериментальным распределением, полученным с помощью соотношения

$$f_\mu = \frac{-\overline{u'v'_*} \epsilon_*}{c_\mu k_*^2 (d\varphi/d\eta)}. \quad (3.225)$$

следующего из равенств (3.214) и (3.215), а также опытных данных, приведенных на рис. 3.22. Числа Рейнольдса, определяющие поведение функции f_μ в разных моделях, также вычислены по опытным данным рис. 3.22. Как видно из рис. 3.23, экспериментальная функция f_μ приблизительно постоянна при $\eta < 15$, а затем почти линейно растет до $\eta = 60$,

после чего плавно приближается к единице. Модельные кривые f_μ , как видно из того же рисунка, существенно отличаются от опытной. Если учесть, что переходная область, согласно экспериментальным данным, расположена при $5 < \eta < 30-40$ и, следовательно, влияние вязкости ограничивается теми же пределами, то

предпочтение из всех приведенных зависимостей следует отдать зависимости $f_\mu(\eta)$, использованной в модели Лаундера — Шармы.

Относительно роли функции f_2 , учитывающей влияние локального числа Рейнольдса на диссипацию в уравнении для ϵ , можно сказать, что все модификации этой функции приводят к асимптотическому значению, равному единице при числах $R_\tau < 15$. На этом основании можно предположить, что вид функции f_2 не оказывает заметного влияния на конечные результаты.

Приведенные выше модельные уравнения для характеристик турбулентности решались совместно с уравнениями неразрывности и количества движения для двумерных турбулентных пограничных

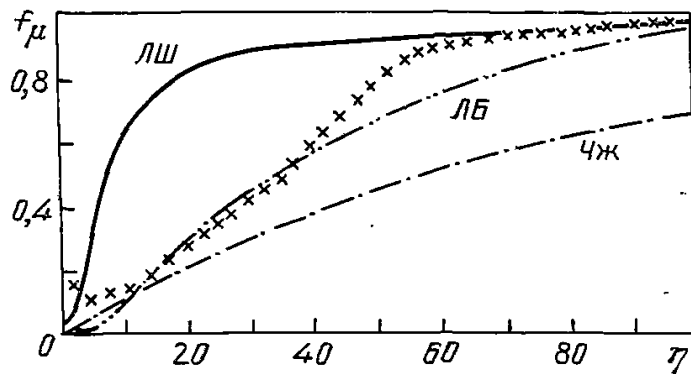


Рис. 3.23. Изменение функции f_μ в зависимости от расстояния до стенки

слоев

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.226)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right). \quad (3.227)$$

Результаты расчетов по различным моделям и опытные данные приведены на рис. 3.24—3.29.

На рис. 3.24 приведены профили кинетической энергии турбулентности на плоской пластине. Только модель Лэма — Бремхорста

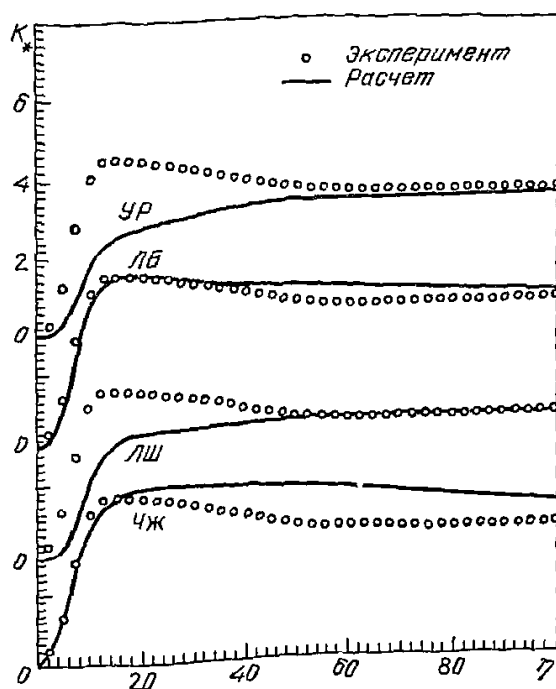


Рис. 3.24. Измеренные и рассчитанные профили кинетической энергии турбулентности в пристеночной области

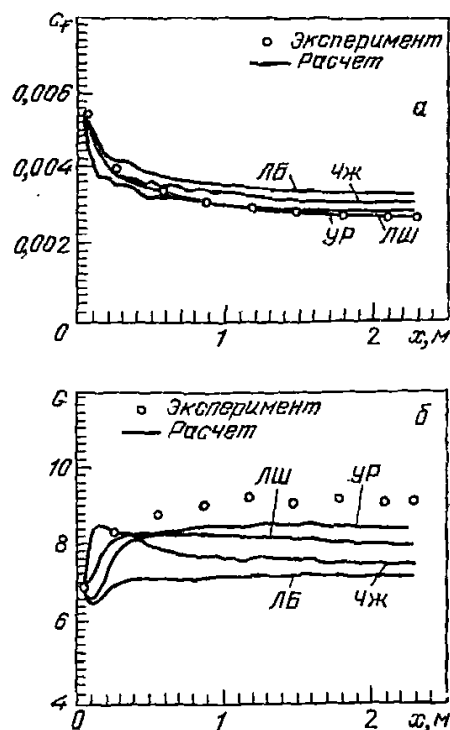


Рис. 3.25. Сравнение результатов расчетов по моделям турбулентности с опытными данными [368]: а) коэффициент поверхностного трения, б) параметр G

привела к более или менее удовлетворительному результату. Остальные модели дали результаты, достаточно далекие от опытных данных [365].

На рис. 3.25 представлены результаты расчетов коэффициента трения c_f (рис. 3.25, а) и формпараметра G (рис. 3.25, б)

$$G = \frac{v_*}{\delta^* u_e} \int_0^\infty \left(\frac{u_e - u}{v_*} \right)^2 dy$$

в равновесном пограничном слое с положительным перепадом давления (скорость внешнего течения изменялась по закону $u_e \sim x^{-0,15}$)

опыты Андерсена и др. [368]). Модели Лаундера — Шармы и Уилкокса — Рубезина, как видно из рисунка, дали вполне удовлетворительные результаты.

На рис. 3.26—3.27 изображены опытные данные Симпсона и Уоллеса [369] для пограничного слоя с отрицательным градиентом давления. Параметр ускорения $K = (\nu/u_e^2)(du_e/dx)$ был приблизительно постоянным и равным $2 \cdot 10^{-6}$. Наилучшее соответствие

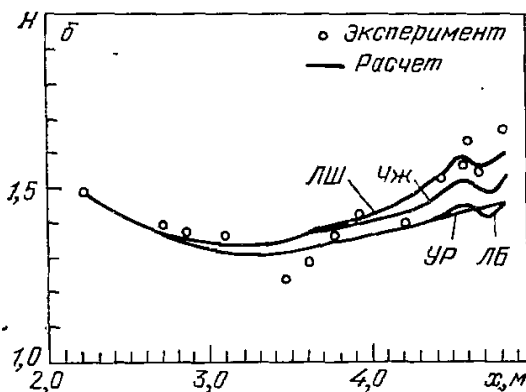
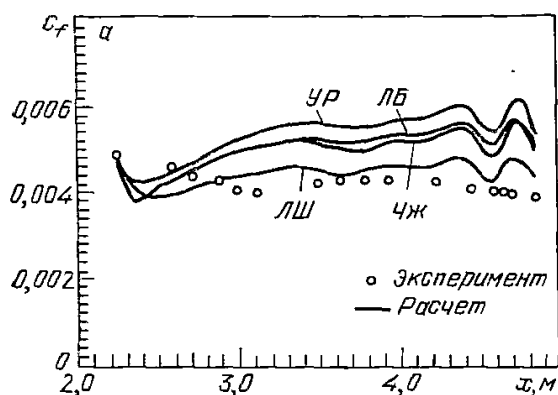


Рис. 3.26. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [369]: а) коэффициент поверхностного трения; б) формпараметр H

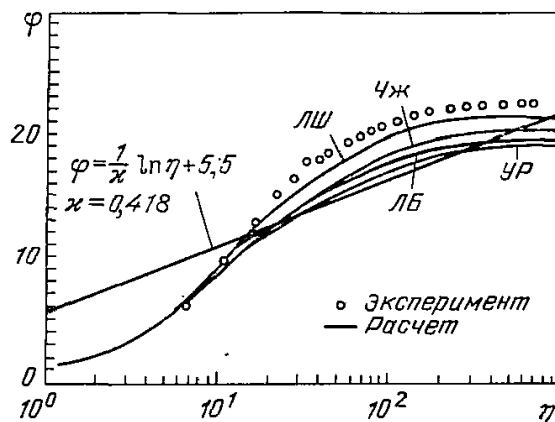


Рис. 3.27. Профили скорости при $x = 4,604$ м в течении [369]

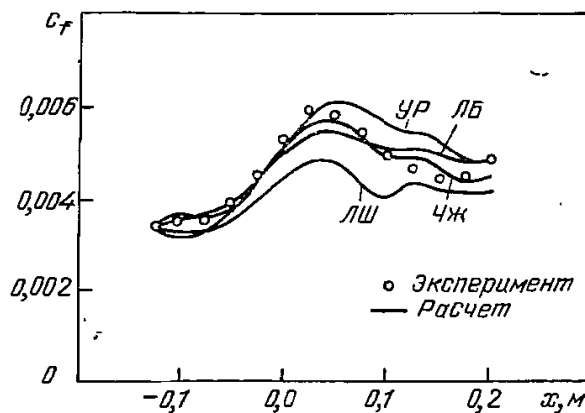


Рис. 3.28. Сравнение результатов расчетов по моделям турбулентности с опытными данными [370]

с опытными данными по c_f , $H = \delta^*/\delta^{**}$ и профилям скорости было получено на основе модели Лаундера — Шармы.

На рис. 3.28 результаты расчетов коэффициента трения сравниваются с опытными данными Пейтела и Хеда [370], полученными в ускоряющемся потоке. Все модели, кроме модели Лаундера — Шармы, хорошо описывают рост c_f на начальном участке и его последующее уменьшение, вызванное реламинаризацией течения.

На рис. 3.29 сравниваются рассчитанные и измеренные [371] коэффициенты поверхностного трения в потоке, в котором достигалось значение параметра ускорения $K = 7 \cdot 10^{-6}$. Резкое падение c_f

в этих опытах связано с реламинаризацией течения. Лишь модель Лаундера — Шармы привела к удовлетворительным количественным результатам, остальные модели описывают особенности исследованного течения лишь качественно.

Приведенные результаты сравнения расчетных и опытных данных позволяют, по-видимому, сделать вывод о предпочтительности

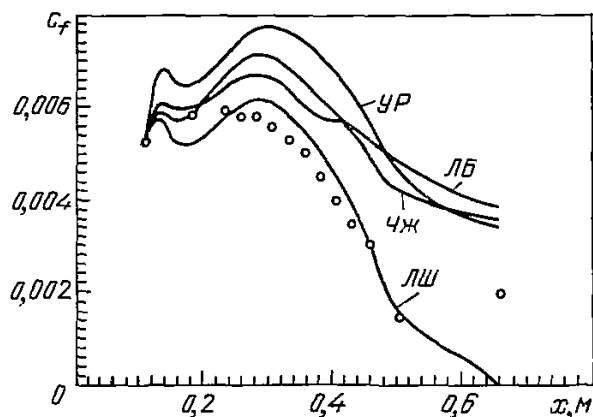


Рис. 3.29. Сравнение результатов расчетов по моделям турбулентности с экспериментальными данными [371]

модели Лаундера — Шармы перед другими моделями. Однако должно быть также очевидно, что ресурсы улучшения двухпараметрических моделей далеко не исчерпаны. Более общие оценки возможностей двухпараметрических моделей турбулентности для исследования внутренних течений будут даны в следующем параграфе.

§ 14. О некоторых результатах исследований внутренних турбулентных течений

Проблемы моделирования турбулентных течений и оценка возможностей различных подходов к решению этих проблем были подробно рассмотрены в § 7. Наиболее важным выводом, основывающимся на этих оценках, является вывод о том, что практической основой моделирования и описания турбулентных течений был и остается моментный подход, базирующийся на осредненных по Рейнольдсу (или по Фавру) уравнениях Навье — Стокса, замкнутых с помощью тех или иных моделей турбулентности. Ниже будут рассмотрены некоторые результаты исследований внутренних турбулентных течений на основе моделей, использующих уравнения для первых и вторых моментов. Вначале будут рассмотрены результаты исследований однородных по составу газов и нереагирующих смесей, а затем — реагирующих газовых смесей.

14.1. Однородные по составу газы и нереагирующие газовые смеси. Специфические особенности применения рассмотренных в § 11 алгебраических моделей к расчету внутренних течений заключаются в том, что, в отличие от задач внешнего обтекания с ясно

выраженным доминирующим направлением течения, во внутренних течениях нередко имеют место ситуации, когда указать такое направление либо затруднительно, либо просто невозможно. Помимо отмеченного обстоятельства, не менее существенно и то, что во внутренних течениях большое значение имеет взаимодействие сдвиговых слоев, образующихся на стенках каналов. Отмеченные и некоторые другие особенности внутренних вязких ламинарных течений были рассмотрены в гл. 2 и могут быть целиком отнесены к турбулентным течениям. Подробный анализ возможных структур внутренних турбулентных течений и характерных гидродинамических явлений, присущих этим течениям, дан в работе [379].

Градиентный характер алгебраических моделей для турбулентных напряжений в условиях, когда доминирующее направление потока не может быть заранее определено, приводит нередко к непреодолимым трудностям в описании таких течений, например, течений с развитыми рециркуляционными зонами.

Для течений, в которых характер анизотропии потока заранее известен и оказываются возможными применения приближения пограничного слоя (на начальном участке течения в канале и на участке стабилизированного течения), наиболее часто используемыми моделями турбулентности являются модели Рейхардта [332], иногда в модификации Голдмена [380], а в последние годы модифицированная формула Прандтля с демпфирующим множителем Ван-Дриста (3.151), (3.141).

Оценивая обширный опыт применения указанных моделей к расчету течений в длинных гладких по форме каналах без химических реакций, можно сказать, что результаты этих расчетов по сопротивлению, тепло- и массообмену, а также по локальным характеристикам полей скоростей, температур и концентраций, как правило, хорошо согласуются с опытными данными.

К настоящему времени накоплен опыт описания некоторых типов внешних и внутренних турбулентных течений на основе полных уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью тех или иных алгебраических моделей турбулентности [381—383].

В первой из цитированных работ [381]*) приводятся результаты расчетного и экспериментального исследований некоторых двумерных турбулентных течений (течение на начальном участке турбулентной пристенной струи, отделенной от основного потока перегородкой с толстой кромкой; плоская турбулентная струя, натекающая на нагретую пластину; течение в плоском канале с поперечными ребрами на одной стенке). Некоторые детали указанных течений удалось описать вполне удовлетворительно, однако общий вывод сводился к тому, что гипотеза длины пути смешения

*) В монографии [381] приводится большой список литературы (189 наименований), включающий работы советских и зарубежных авторов в области вычислительной гидродинамики, опубликованные до 1970 г.

неприменима для двумерных течений. В этой же работе содержатся результаты численного исследования на основе модели эффективной вязкости течения в цилиндрической камере с химически равновесным горением и течения в конической камере сгорания при конечной скорости химической реакции (в обоих случаях без учета влияния турбулентности на кинетику химических реакций). Результаты расчетов оцениваются как вполне благоприятные.

В обзорной работе [382] дан анализ моделей турбулентности, применяемых для расчета внешнего обтекания тел с отрывом и без отрыва потока, в том числе в рамках осредненных уравнений Рейнольдса. В работе [383] приводятся результаты расчета течения в прямоугольных трубах с произвольным отношением сторон на основе эмпирической трехмерной модели для масштаба турбулентности. Указывается на приемлемую точность полученных результатов и преимущества использованного подхода по сравнению с $(k - \epsilon)$ -моделью турбулентности.

Оценивая в целом возможности описания турбулентных течений на основе полной системы уравнений Рейнольдса и алгебраических моделей турбулентной вязкости, можно, по-видимому, сказать, что хотя эти возможности несколько расширяются по сравнению с подходами, основанными на приближениях пограничного слоя и узкого канала, однако круг задач, в которых преимущества полной системы могут заметно проявиться, не является достаточно широким. Более того, как правило, применение полной системы уравнений Рейнольдса связано с необходимостью широкого использования эмпирической информации, что лишает применяемые при этом модели турбулентной вязкости свойства универсальности.

По указанным причинам моделирование турбулентных внутренних течений на основе полных уравнений Рейнольдса и алгебраических моделей турбулентной вязкости получило гораздо меньшее развитие по сравнению с моделированием на основе уравнений для вторых моментов.

По сложившейся традиции эти модели делятся на одно-, двух- и многопараметрические в зависимости от числа дифференциальных уравнений для характеристик турбулентности, используемых в модели.

Модели, основанные на использовании уравнения переноса кинетической энергии турбулентности в совокупности с уравнениями переноса для других величин, составляют наиболее многочисленную группу. Менее разработаны и реже используются на практике уравнения переноса компонент тензора напряжений Рейнольдса.

В литературе встречаются различные способы классификации моделей первой группы. Наиболее удачной на наш взгляд является классификация, примененная в обзорной статье Харши [297]. Согласно этой работе большинство из моделей указанного типа делятся на две группы. Первая из них основывается на использовании гипотезы Невзглядова — Драйдена о линейной связи турбулентного

напряжения трения и кинетической энергии турбулентности. Для второй характерно использование гипотезы Колмогорова — Прандтля [348], постулирующей связь турбулентной вязкости с кинетической энергией турбулентности и масштабом турбулентности (формула (3.190)).

Для оценки возможностей моделей той или другой группы важно отметить, что и гипотеза Невзглядова — Драйдена, и гипотеза Колмогорова — Прандтля являются по своей структуре локальными, поскольку выражают локальное значение одной турбулентной величины через локальные значения других турбулентных величин. Локальность эта, однако, как отмечалось ранее, имеет качественно другой характер по сравнению с алгебраическими моделями, поскольку в последнем случае турбулентные параметры — напряжение трения или турбулентная вязкость — выражаются через локальные характеристики осредненных величин. Проявлением того же локального подхода является использование гипотезы Буссинеска для турбулентного напряжения во многих моделях первой и во всех моделях второй группы (градиентное представление потоков величин). С учетом того, что равновесие внутренней структуры турбулентности устанавливается быстрее, чем равновесие между осредненными и пульсационными полями, можно ожидать, что модели, основанные на использовании уравнений для вторых моментов, потенциально должны лучше описывать турбулентные неравновесные течения.

Модели группы Невзглядова — Драйдена не нашли широкого применения при описании внутренних турбулентных течений [385—386]. В однопараметрических моделях группы Колмогорова — Прандтля наряду с осредненными уравнениями Рейнольдса (полными или их приближениями) и уравнением кинетической энергии турбулентности используются те или иные алгебраические соотношения для масштаба турбулентности, нередко идентифицируемого с длиной пути перемешивания. Точность этих моделей при описании пристенных течений, в том числе внутренних, как показал опыт их применения, примерно такая же, как и моделей, основанных на чисто алгебраических гипотезах турбулентности [387].

Наибольшее применение при описании внутренних течений нашли двухпараметрические модели группы Колмогорова — Прандтля, в которых наряду с уравнением кинетической энергии турбулентности используются дифференциальные уравнения переноса для масштаба турбулентности или величины, выражающейся через комбинацию энергии турбулентности и масштаба.

Модель Нг и Сполдинга [388] была использована для расчетов течения на плоской пластине, полностью развитого течения в трубе, течений в плоском канале и в плоской пристеночной струе. Сравнение результатов этих расчетов с опытными данными можно считать удовлетворительным, хотя в описании отдельных деталей было отмечено различие (в опытах положения точек, в которых

напряжение трения и производная от скорости по поперечной координате обращаются в нуль, не совпадают; в расчете эти точки, естественно, совпадают).

Наибольшее распространение при описании пристенных, в частности, внутренних течений получили $(k - \varepsilon)$ -модели, рассмотренные в § 13.

Впервые модель подобного рода была предложена в работе Харлоу, Накаяма, относящейся к 1968 г. (см. более позднюю публикацию [389]), для расчета свободных турбулентных течений. В дальнейшем $(k - \varepsilon)$ -модель была модифицирована для расчета течений в пограничном слое при небольших числах Рейнольдса в работе Джонса — Лаундера [377] и для исследования ламинаризации течения [390]. Сущность модификации (подробно этот вопрос рассматривался в § 13) сводилась к добавлению в уравнения для k и ε членов, учитывающих молекулярный перенос вблизи стенки и замене некоторых постоянных на функции локального числа Рейнольдса. Расчетный профиль скорости срачивался в окрестности стенки с профилем в вязком подслое. Сравнение результатов расчетов по модели Джонса — Лаундера с опытными данными проведено, помимо работ ее авторов, также в работе Лаундера — Сполдинга [391]. В последней из работ при описании процессов переноса в пристеночной области использовался искусственный прием срачивания решения для скорости с логарифмическим профилем скоростей. Иными словами, так называемые пристеночные функции определялись на основании закона стенки. Указанный прием, как отмечалось выше, оказывается эффективным лишь при небольших продольных перепадах давления. При больших положительных перепадах давления по мере приближения к точке отрыва область закона стенки вырождается, т. е. логарифмический участок исчезает. Очевидно, что использование пристеночных функций не обеспечивает надежного предсказания положения точки отрыва. Об этом, в частности, свидетельствуют результаты сравнения характеристик турбулентных пограничных слоев, рассчитанных по методу Лаундера — Сполдинга [347] с данными канонических экспериментов, приведенными в материалах Стэнфордской конференции [344].

Остановимся несколько подробнее на работах, в которых $(k - \varepsilon)$ -модель применялась для расчетов течения в каналах. В работе [392] на основе полных уравнений Рейнольдса и уравнений для $k - \varepsilon$ (модель Лаундера — Сполдинга) с использованием пристеночных функций закона стенки проведены расчеты течения и теплообмена в круговой трубе с внезапным расширением. В работе [393] та же задача была решена тем же методом, но с уточнением описания переноса энергии турбулентности вблизи стенки.

Исследование течения в каналах и пограничных слоях с использованием усовершенствованной модели Джонса — Лаундера, позволяющей осуществлять расчет вплоть до вязкого подслоя, проведено в работе [373] (оценка модели дана в § 13).

Исследование влияния уровня турбулентности на входе в трубу на длину начального участка и другие характеристики потока проведено в приближении пограничного слоя (узкого канала) на основе $(k - \varepsilon)$ -модели в работе [394].

Численный расчет теплообмена за расположенным вниз по потоку уступом на основе полных уравнений Рейнольдса и уравнений $k - \varepsilon$ с использованием пристеночных функций проведен в работе [395]. При этом установлено, что для получения соответствия с опытными данными входные значения кинетической энергии турбулентности должны быть увеличены в несколько раз.

Модель Лэма — Бремхорста [375], представляющая усовершенствованный вариант модели Джонса — Лаундера, непосредственно предназначенный для исследования стабилизированного течения в круглой трубе, была подробно рассмотрена в § 13. Модификация $(k - \varepsilon)$ -модели для криволинейных каналов предложена в работе [396]; возможности расчета сжимаемых течений в поршневом двигателе на основе $(k - \varepsilon)$ -модели оцениваются в работе [397].

В цитированной уже выше работе [383] проведено сопоставление опытных данных с результатами расчетов течения в прямоугольных трубах с произвольным отношением сторон на основе трехмерной модели для линейного масштаба, $(k - \varepsilon)$ -модели и модели, основанной на уравнениях для всех компонент тензора напряжений Рейнольдса. Отмечается большой выигрыш в затратах машинного времени при использовании первой из моделей и ее приемлемая точность.

В работе [398] приведены результаты измерений осредненных и турбулентных параметров в двумерной полости, моделирующей выходную камеру атомного реактора. Эти результаты были сопоставлены с результатами расчетов по $(k - \varepsilon)$ -модели и модели $k - \nu_t$ (ν_t — турбулентная вязкость). По осредненным параметрам соответствие опытных и расчетных данных в целом оказалось неплохим, однако по параметрам турбулентности эти данные не согласуются в значительной области течения (рис. 3.30). Результаты расчетов были очень чувствительны к малым изменениям констант турбулентности и существенно зависели от уровня турбулентности на входе.

Приведенный краткий обзор исследований внутренних течений на основе тех или иных моделей турбулентности, главным образом модели $k - \varepsilon$, имел целью, с одной стороны, оценить возможности этих моделей, с другой — указать на серьезные трудности, возникающие при моделировании внутренних течений. Вероятно, обоснованным будет вывод об отсутствии в настоящее время достаточно надежной модели турбулентности, позволяющей описать широкий класс внутренних течений. Этот вывод касается прежде всего наиболее апробированной из рассмотренных моделей — $(k - \varepsilon)$ -модели. Опыт применения других моделей пока еще недостаточен для

сколько-нибудь далеко идущих выводов. Так, пока еще практически не опробованы модели, основанные на применении уравнений переноса для напряжений Рейнольдса [399]. Определенный интерес

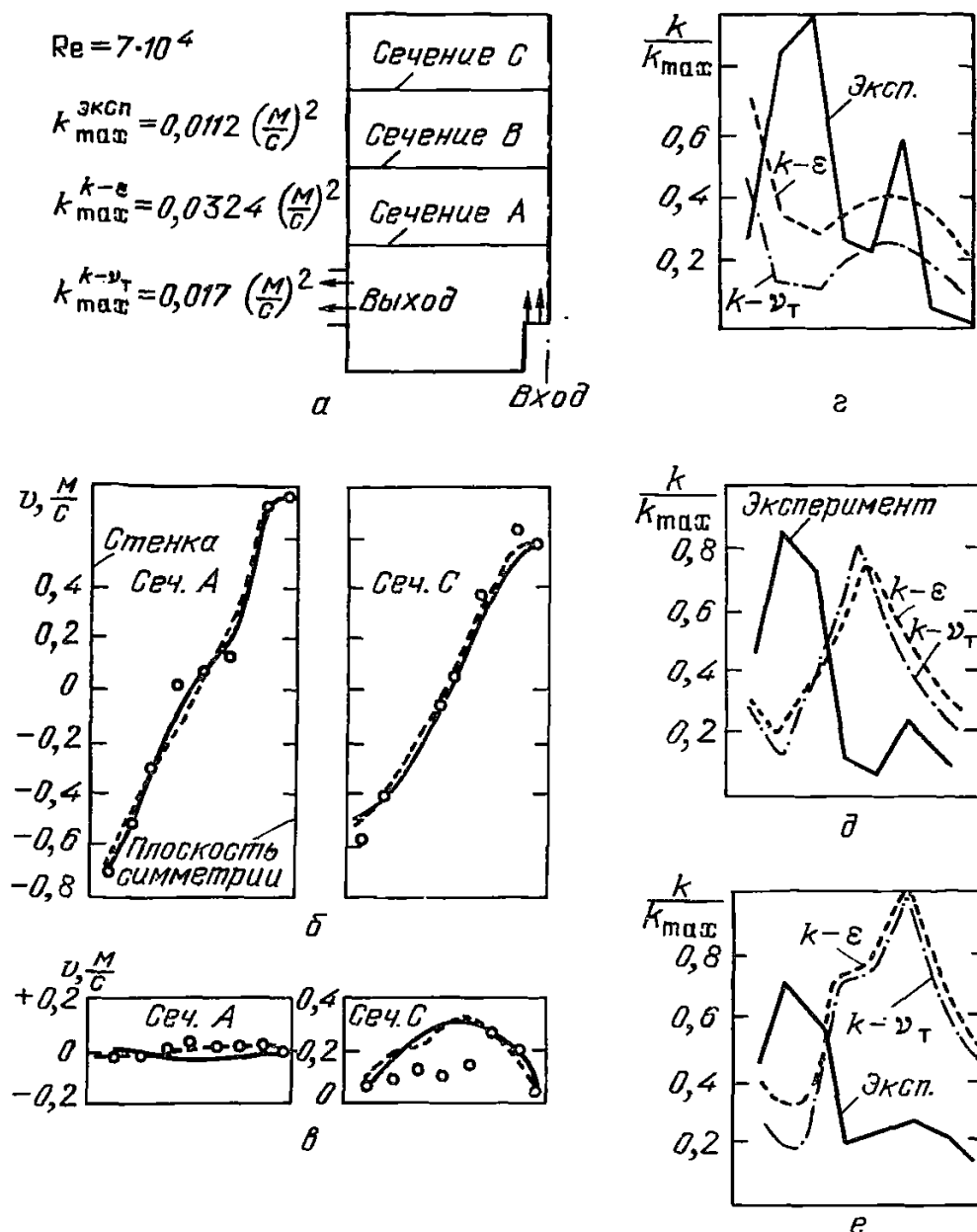


Рис. 3.30. Сравнение результатов расчетов течения в двумерной полости по двухпараметрическим моделям турбулентности с опытными данными [398]: схема течения и основные результаты расчетов и экспериментов (а); профили вертикальной составляющей скорости v в различных сечениях (б); профили горизонтальной составляющей скорости u в различных сечениях (в); профили кинетической энергии турбулентных пульсаций k/k_{max} в сечениях С (д), В (е) и А (е)

может представить опыт применения трехпараметрических моделей [362]. Наряду с рассмотренными рекомендуем перечень оригинальных [400—404] и обзорных [296, 379, 384, 405—411] работ.

Проведенный анализ состояния проблемы моделирования турбулентных внутренних течений свидетельствует о серьезных трудностях, возникающих при описании процессов переноса в пристенных областях. Более или менее надежные результаты по расчету сопротивления, тепло- и массообмена получаются для длинных гладких труб каналов. При этом удовлетворительные результаты получаются как на основе простейших алгебраических моделей, так и на основе более информативных моделей, базирующихся на уравнениях для вторых моментов.

При описании на основе полных уравнений Рейнольдса и уравнений для вторых моментов сложных внутренних течений с отрывом потока и развитыми рециркуляционными зонами нельзя указать надежную модель.

Алгебраические модели и модели однопараметрические, уравнение для кинетической энергии турбулентности и алгебраические аппроксимации для масштаба турбулентности оказываются близкими по точности, однако требующими использования большого объема эмпирической информации о масштабах турбулентности.

Наиболее апробированной моделью для описания рассматриваемого класса внутренних течений является $(k - \varepsilon)$ -модель турбулентности, однако и эта модель не приводит часто к удовлетворительным результатам, особенно в описании полей пульсационных величин и локальных характеристик трения и теплообмена.

Причины указанных трудностей следует искать прежде всего в локальном характере гипотез и допущений, используемых при построении моделей. Здесь можно указать на локальный характер гипотезы Колмогорова — Прандтля; на, по существу, основывающиеся на соображениях локальности, аппроксимации отдельных членов в модельных уравнениях. Используемые в уравнениях для вторых моментов эмпирические константы (их число может быть весьма значительным) определяются из сопоставления расчетов с опытными данными для равновесных течений, а применяются указанные модели часто для условий, далеких от равновесных, когда существенными могут стать эффекты «памяти» (влияние предыстории течения). В последнем случае становится малоэффективным широко используемое при построении большинства моделей представление о градиентном характере процессов переноса.

При оценке возможностей моделей, основывающихся на гипотезе Колмогорова — Прандтля и уравнениях кинетической энергии турбулентности и диссипации, для описания пристенных течений с большими перепадами давления необходимо иметь в виду, что указанные модели, как правило, первоначально разработанные для свободных течений, по существу переносятся на пристенные течения без должного учета характера процессов переноса и структуры течения в пристенной области. Использование пристеночных функций или эмпирических зависимостей, учитывающих влияние локального числа Рейнольдса, не базируется на учете реальных

изменений структуры турбулентных потоков. Например, использование пристеночных функций, основывающихся на законе стенки, имеет основания лишь при небольших перепадах давления. Как уже отмечалось выше, указанный прием нельзя признать удовлетворительным в предотрывной области, поскольку логарифмический участок на профиле скорости может в этих условиях отсутствовать. Тем более неправомерно использовать пристеночные функции за точкой отрыва, хотя в литературе можно указать на примеры подобного рода.

Продолжительность активного применения полуэмпирических моделей турбулентности, основанных на уравнениях для вторых моментов, измеряется примерно десятилетием. Имевшийся в начале 70-х годов оптимизм в оценке возможностей этих моделей для описания пристенных течений в настоящее время уступил место если не разочарованию, то по крайней мере гораздо более трезвому подходу к оценке этих возможностей. По-видимому, становится все более очевидным, что без детального исследования структуры пристенных течений и процессов переноса в равновесных и неравновесных потоках дальнейший прогресс в моделировании этих течений невозможен. Вероятно, будет уместным указать на необходимость переоценки роли простейших алгебраических моделей. Оптимизм в оценке возможностей моделей типа $(k - \epsilon)$ -модели привел практически к резкому падению интереса к алгебраическим моделям и замедлению темпа их разработки. Отсюда не желая противопоставлять те или другие модели, справедливо будет напомнить, что простые качественные представления о природе изучаемых явлений, лежащие в основе алгебраических моделей, всегда были хорошей основой для создания более сложных моделей. Представляется сомнительной и бесплодной точка зрения, согласно которой использованием сложных моделей пытаются подменить традиционный и многократно оправдавший себя путь от простого к сложному.

14.2. Течения с химическими реакциями. В предыдущем разделе были кратко рассмотрены чисто «турбулентные» проблемы внутренних течений, возникающие при описании таких течений, в частности, проблемы выбора подходящих моделей турбулентности, оценки их возможностей и перспектив применения.

Проблема адекватного описания внутренних турбулентных течений химически реагирующих газовых смесей до настоящего времени остается в прикладной физике одной из самых сложных проблем. Многие стороны этой проблемы не только не исследованы теоретически и экспериментально, но, по существу, не достигли уровня конкретизации, который позволил бы с уверенностью говорить о завершении этапа постановки задачи. В то же время решение проблемы турбулентных течений с химическими реакциями имеет чрезвычайно большое практическое значение, обусловленное естественным стремлением в условиях энергетического и экологи-

ческого кризиса к увеличению эффективности сжигания топлива и уменьшению вредных выбросов в различных энергетических установках, созданию принципиально новых способов и устройств по преобразованию одних видов энергии в другие, таких, например, как газодинамические лазеры и т. д.

Сложность рассматриваемой проблемы связана, с одной стороны, с незавершенностью теории турбулентности, с другой — со специфическими особенностями турбулентных течений с химическими реакциями, заключающимися в чрезвычайно сложном характере взаимного влияния процессов турбулентного переноса и процессов химического реагирования.

Вероятно, правильно было бы сказать, что наиболее важной с прикладной точки зрения составной частью общей проблемы турбулентных течений с химическими реакциями является проблема турбулентного горения. Однако последняя оказалась столь сложной и многогранной, что нередко оба термина употребляются в литературе как синонимы.

Начало исследований турбулентного горения обычно относят к классической работе Ле Шателье 1883 г., однако вплоть до 50—60-х гг. нашего столетия эти исследования носили эмпирический характер. Современный этап теории турбулентных течений с химическими реакциями связывают с эрой реактивной авиации и ракетной техники. Если же попытаться охарактеризовать начало этого этапа на основе выделения некоторого методологического принципа, то представляется справедливым нередко высказываемое в литературе суждение [412] о том, что для современного этапа теории турбулентного горения характерно применение эйлерова подхода в описании течений с химическими реакциями, т. е. подхода, основанного на использовании уравнений переноса, учитывающих кинетику химических реакций. Надо признать, что при исследовании вязких ламинарных течений этот подход оказался чрезвычайно плодотворным. На основе этого подхода удалось решить многие сложнейшие проблемы, например, рассчитать на основе полных уравнений Навье — Стокса течение многокомпонентной смеси (~ 15 компонент) с химическими реакциями (до 80 элементарных реакций) в резонаторе химического лазера.

Положение, сложившееся ныне в теории турбулентных течений с химическими реакциями, оценивается специалистами по-разному. Спектр этих оценок достаточно широк: от сдержанно оптимистических до глубоко пессимистических, характеризующих положение как кризисное [412].

Вне зависимости от того, какие из указанных оценок правильнее отражают действительное положение вещей, все они в целом свидетельствуют о неудовлетворенности достигнутыми результатами и активных поисках новых путей решения проблемы.

Если попытаться кратко указать на причины трудностей, возникающих при описании турбулентных течений с химическими

реакциями, то можно сказать, что природа этих трудностей заложена в применяемой ныне методологии исследований турбулентных течений. Представление поля турбулентного течения как осредненного и пульсационного и применение метода осреднения по Рейнольдсу или по Фавру к уравнениям переноса для течений с химическими реакциями приводит к появлению в этих уравнениях корреляционных членов, моделирование которых требует использования очень больших объемов статистической информации о многих параметрах течения. Особые трудности возникают при осреднении источниковых членов в уравнениях переноса отдельных компонент химически реагирующей смеси, что обусловлено сильно нелинейной зависимостью часто экспоненциальной скорости химической реакции от температуры. Однако необходимость учета влияния турбулентности на скорости образования веществ в турбулентных потоках — лишь одна, хотя и наиболее сложная, сторона проблемы. При протекании в потоке химических реакций, сопровождающихся большими тепловыми эффектами, существенное значение может иметь влияние кинетических процессов на характеристики турбулентного переноса. В частности, в потоках с интенсивным изменением плотности среды вследствие тепловыделения за счет химической реакции становится сомнительной возможность описания процессов турбулентного переноса с помощью градиентных представлений; требуют тщательной экспериментальной проверки и различные аппроксимации, используемые при замыкании моментных уравнений в моделях турбулентных течений с постоянной плотностью.

В настоящее время можно выделить несколько подходов к проблеме расчета характеристик турбулентных течений с химическими реакциями.

Первый из них основывается на моделях турбулентности, рассмотренных в § 11, 13 и других подобных моделях, не учитывающих влияние химических реакций на процессы турбулентного переноса. При этом также не учитывается влияние турбулентности на скорости химических реакций: последние определяются по осредненным значениям концентраций и температуры. Такой подход, естественно, оправдан, когда пульсации температуры и состава достаточно малы. К сожалению, оценка границ применимости такого подхода весьма затруднена, если отсутствуют экспериментальные данные. Тем не менее в рамках такого подхода были получены некоторые важные оценки роли химических реакций в процессах тепло- и массообмена как во внешних течениях [318], так и во внутренних задачах [413].

Дальнейшее развитие классический метод моментов получил в работах, в которых предложены полуэмпирические модели турбулентности, учитывающие те или иные корреляционные моменты между скоростью, плотностью, температурой, концентрациями реагирующих компонент [414—419]. К этой же группе работ можно

отнести работы, в которых полуэмпирически учитывается влияние неполноты смешения на горение [420—422], предлагаются приемы упрощения сложных кинетических схем на последовательность более простых [423].

Другой подход, получивший развитие в последнее десятилетие и интенсивно развивающийся в настоящее время, связан с применением метода функции плотности вероятности ФПВ. В основе метода лежит использование эволюционных уравнений для ФПВ, полученных с помощью уравнений переноса для течений с химическими реакциями. В качестве существенного результата, полученного в последние годы, можно указать на завершение в основном методов получения эволюционных уравнений ФПВ для произвольной кинетической схемы реакций и различных типов течения. Подробное обоснование метода ФПВ, описание результатов, достигнутых с его помощью, и оценка перспектив развития этого метода содержится в обзоре Либби и Вильямса [424], который может быть рекомендован как учебное пособие по методу ФПВ.

Анализ возможностей метода ФПВ показывает, что его применение в настоящее время ограничивается простейшими реагирующими системами. Это ограничение обусловлено тем, что с увеличением числа реагирующих компонент растет число независимых переменных, а это ведет к увеличению размерности конфигурационного (фазового) пространства. Для понимания сути метода ФПВ можно указать на существование некоторой формальной аналогии этого метода с методологией кинетической теории газов. Более того, есть свидетельства, что методы кинетической теории газов могут быть использованы в той или иной степени в методе ФПВ. Однако проблема заключается не только в сложности численной реализации метода ФПВ. По существу нерешенной остается проблема получения граничных условий для ФПВ.

Практические возможности метода ФПВ могут быть существенно расширены, если описание процессов на уровне ФПВ применять не для всех независимых переменных, а лишь для некоторых из них, сохранив при этом для других переменных описание на основе уравнений для моментов, замкнутых с помощью тех или иных гипотез турбулентности. В качестве переменных, описываемых с помощью уравнений для ФПВ, используются концентрация пассивной примеси [416—417], концентрации пассивной примеси и реагирующих компонент [425], масштаб поля концентраций и концентрации [426], концентрации и температура [427].

В указанных и др. работах, как правило, используются различные модельные представления для ФПВ. Естественно, при таком подходе понижается информативность метода, его точность и надежность. Накопленный опыт применения метода ФПВ для анализа турбулентных течений с химическими реакциями, по-видимому, дает основание для вывода о том, что сложности описания турбулентных течений в рамках моментной формулировки и метода

ФПВ примерно одинаковы, однако проблемы замыкания в моментном подходе изучены гораздо лучше (см. статью О'Брайена в обзоре [424]). Наряду с указанным обзором рекомендуем обзорные работы [428—431].

В последние годы начали разрабатываться методы описания турбулентных течений с химическими реакциями, основанные на представлении о когерентных структурах, существующих в потоках. Наиболее характерным из них является метод, получивший название ESCIMO [412, 432]. В основу метода положена идея сочетания лагранжева и эйлера способов описания движения сплошных сред. На первом этапе, называемом «демографическим», проводится анализ поведения крупных когерентных структур, их рождения, движения, деформации, исчезновения. На втором — «биографическом» этапе на основе традиционных методов изучаются процессы переноса, химические реакции на молекулярном уровне внутри когерентных структур. Оценки перспектив этого эвристического метода весьма разноречивы [424, 428, 412, 432], иногда взаимоисключающие. Подобные взаимоисключающие оценки свидетельствуют о том, что ни один из существующих подходов не привел пока к созданию достаточно эффективных методов расчета, удовлетворяющих потребности практики, и что поиски путей решения проблемы турбулентных течений с химическими реакциями продолжаются.

§ 15. Турбулентные потоки массы и энергии.

Эффективная и турбулентная теплопроводность и диффузия в пограничном слое

Помимо тензора турбулентных напряжений τ_{jk}^T (3.55), в систему уравнений турбулентного движения многокомпонентных смесей входят турбулентный поток тепла b_j^T (3.57) и турбулентный поток массы i -й компоненты J_{ij}^T (3.56). Из сопоставления равенств (3.56) и (3.57) следует, что турбулентный поток тепла (3.57) можно записать в виде

$$q_j^T = \sum_{i=1}^{N_k} \tilde{h}_i J_{ij}^T + \sum_{i=1}^{N_k} \bar{\rho} \tilde{c}_i \overline{v_j'' h_i''}. \quad (3.228)$$

Первый член в правой части равенства (3.228) характеризует перенос энергии за счет турбулентного переноса массы i -й компоненты (турбулентной диффузии), второй — описывает перенос тепла за счет турбулентной теплопроводности.

Для замыкания системы уравнений турбулентного движения в общем случае необходимо выразить турбулентные потоки тепла и вещества через осредненные параметры течения. Характеризуя общее состояние рассматриваемой проблемы, следует признать, что теории турбулентной теплопроводности и диффузии ныне факти-

чески не существует. Лишь для потоков с ясно выраженным доминирующим направлением движения, например, в гладких трубах и каналах, двумерных пограничных слоях разработаны практические приемы, позволяющие оценить интенсивность процессов переноса тепла и вещества.

В случае использования уравнений для первых моментов обычно принимается допущение о градиентном характере переноса количества движения, тепла или вещества.

Далее ограничиваясь приближением двумерного пограничного слоя и рассматривая пока лишь турбулентный перенос тепла в однородном по составу газе, введем по аналогии с коэффициентом турбулентной вязкости μ_t коэффициент турбулентной теплопроводности λ_t

$$\mu_t = - \frac{\overline{\rho u'' v''}}{\partial u / \partial y}, \quad \lambda_t = - \frac{\overline{\rho v'' h''}}{\partial T / \partial y}. \quad (3.229)$$

Так называемый полный тепловой поток q_y^Σ может быть представлен в виде

$$q_y^\Sigma = (\lambda + \lambda_t) \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda_\Sigma \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (3.230)$$

Применительно к двухслойной схеме пограничного слоя полный коэффициент теплопроводности $\lambda_\Sigma = \lambda + \lambda_t$ трансформируется в эффективную теплопроводность во внутренней области (области закона стенки) и турбулентную теплопроводность во внешней области (области закона следа), т. е.

$$\lambda_\Sigma = \lambda_{эф} \quad \text{при} \quad 0 \leq y \leq y_m, \quad (3.231)$$

$$\lambda_\Sigma = \lambda_t \quad \text{при} \quad y_m \leq y \leq \delta. \quad (3.232)$$

Здесь y_m — координата границы внутренней и внешней области.

Гипотезы эффективной вязкости были подробно рассмотрены в п. 11.3 § 11. Здесь лишь подчеркнем, что понятие эффективной вязкости включает в себя в качестве неперемного элемента учет взаимодействия процессов молекулярного и турбулентного переноса количества движения вблизи твердой поверхности. Гипотезы турбулентной вязкости для внешней области были рассмотрены в п. 11.4 § 11.

По аналогии с понятием эффективной вязкости понятие эффективной теплопроводности должно учитывать взаимодействие процессов молекулярного и турбулентного переноса тепла. Отсутствие теории турбулентной теплопроводности привело к тому, что расчет коэффициентов турбулентного переноса тепла обычно основывается на тех или иных допущениях об аналогии между переносом тепла и количества движения. Формы этой аналогии довольно многообразны, однако общим для большинства подходов является использование понятий турбулентного и эффективного чисел Прандтля. Эти числа вводятся по аналогии с молекулярным числом Прандтля

равенствами

$$\text{Pr}_{\text{эф}} = \frac{\mu_{\text{эф}} c_p}{\lambda_{\text{эф}}}, \quad \text{Pr}_T = \frac{\mu_T c_p}{\lambda_T}. \quad (3.233)$$

Нетрудно видеть, что введение понятия эффективного числа Прандтля, так же как и полных коэффициентов переноса, не является необходимым. Введение их в основном обусловлено удобством записи уравнений и потоков различных субстанций. Действительно, с учетом определения эффективной вязкости и теплопроводности $\mu_{\text{эф}} = \mu + \mu_T$ и чисел Прандтля (3.233) легко получить соотношение

$$\frac{\lambda_{\text{эф}}}{c_p} = \frac{\mu_{\text{эф}}}{\text{Pr}_{\text{эф}}} = \frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_{\text{эф}} - \mu}{\text{Pr}_T}. \quad (3.234)$$

Из соотношений (3.234) следует, что для определения эффективной теплопроводности $\lambda_{\text{эф}}$ и эффективного числа Прандтля $\text{Pr}_{\text{эф}}$ необходимо знать характер изменения турбулентного числа Прандтля Pr_T в пристеночной области пограничного слоя.

При описании процесса турбулентной теплопроводности во внешней области турбулентного пограничного слоя также удобно пользоваться понятием турбулентного числа Прандтля (второе из равенств (3.233)). Таким образом, проблема расчета турбулентной теплопроводности по сечению пограничного слоя адекватна проблеме определения турбулентного числа Прандтля Pr_T .

Строгой теории для расчета числа Pr_T в настоящее время, как отмечалось, не существует. Отсутствуют систематические опытные данные, позволяющие надежно оценить влияние тех или иных факторов на это число. Тем не менее уже накоплен некоторый опыт построения различных моделей и методов определения турбулентного числа Прандтля. Достаточно подробный обзор указанных моделей содержится в монографии [8].

Здесь лишь отметим, что первая по времени модель числа Pr_T , истоки которой восходят еще к классическим работам О. Рейнольдса, основывается на предположении об общности механизмов переноса тепла и количества движения. Общность можно рассматривать как проявление пассивности (гипотеза пассивности) турбулентных носителей (молей, вихрей) к переносимой ими субстанции (тепло, количество движения). Согласно этой гипотезе число Pr_T должно равняться единице (аналогия Рейнольдса). Надо отметить, что допущение о равенстве единице числа Pr_T длительное время широко использовалось в расчетах процессов турбулентного переноса тепла. Нередко используется это допущение и в настоящее время. Основанием для этого служили довольно обширные опытные данные, полученные путем непосредственных оценок величины числа Pr_T по измерениям профилей скорости и температуры при течении в трубах, каналах и пограничных слоях. Согласно этим экспериментам, проведенным на воздухе, значение числа Pr_T ока-

зывалось немного меньше единицы ($0,8 \leq Pr_T \leq 1$). Однако в опытах по теплообмену в жидких металлах наблюдались числа Pr_T , немного превышающие единицу ($Pr_T < 1,2$).

В последние годы наибольшее предпочтение отдавалось значению числа $Pr_T = 0,86 \div 0,90$.

На рис. 3.31 и 3.32 [434] приведено изменение числа Pr_T поперек пограничного слоя при различных числах Маха. На рис. 3.31

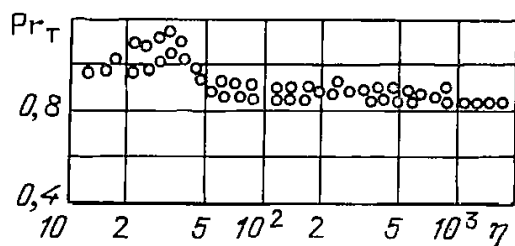


Рис. 3.31. Изменение турбулентного числа Прандтля по сечению пограничного слоя на плоской пластине при сверхзвуковых скоростях ($2,5 < M_e < 4,5$)

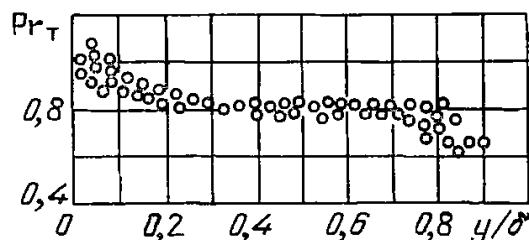


Рис. 3.32. Изменение турбулентного числа Прандтля по сечению пограничного слоя в плоском сопле ($1,7 < M_e < 2,9$)

представлены опытные данные, полученные на пластине ($2,5 < M_e < 4,5$), на рис. 3.32 — в плоском сопле ($1,7 < M_e < 2,9$).

Из рис. 3.31 следует, что при $\eta = yv_*/\nu < 50$ число Pr_T выше, чем в остальном пограничном слое. Это свидетельствует о том, что в переходной области перенос тепла осуществляется интенсивнее, чем перенос количества движения. В области $\eta > 50$ число Pr_T близко к указанным выше значениям $0,86 \div 0,90$. Данные рис. 3.31 также подтверждают отмеченные тенденции.

Таким образом, при практических расчетах можно ограничиться допущением о постоянстве турбулентного числа Прандтля в пограничном слое. Для течений воздуха в качестве значения этого числа можно принять $Pr_T = 0,86 \div 0,90$.

Расчет турбулентной диффузии вещества в многокомпонентных смесях базируется, так же как и расчет турбулентной теплопроводности, на гипотезе пассивности потока по отношению к типу переносимой примеси. Из гипотезы пассивности практически следует вывод об одинаковости (равенстве) коэффициентов турбулентной диффузии для всех компонент смеси или, что то же самое, об одинаковости турбулентных аналогов числа Шмидта для всех компонент смеси

$$Sc_T = \frac{\mu_T}{\rho \mathcal{D}_T} = \frac{\nu_T}{\mathcal{D}_T}. \quad (3.235)$$

Здесь $\mathcal{D}_T$ — коэффициент турбулентной диффузии.

По аналогии с коэффициентом эффективной теплопроводности $\lambda_{эф}$ (3.234) можно ввести в рассмотрение коэффициент эффектив-

ной диффузии

$$\rho \mathcal{D}_{эф} = \frac{\mu}{Sc_i} + \frac{\mu_{эф} - \mu}{Sc_t}. \quad (3.236)$$

Здесь Sc_i — молекулярное число Шмидта, построенное по эффективному коэффициенту диффузии $\mathcal{D}_i$:

$$Sc_i = \mu / \rho \mathcal{D}_i, \quad \mathcal{D}_i = J_{iy} / \rho \frac{\partial c_i}{\partial y},$$

J_{iy} — проекция диффузионного молекулярного потока на ось y .

Данные о турбулентном числе Шмидта Sc_t в пограничном слое в настоящее время практически отсутствуют. В этих условиях согласно классической аналогии Рейнольдса можно принять допущение о равенстве чисел Sc_t единице, т. е. $Sc_t = 1$.

§ 16. О численных методах расчета турбулентных течений газовых смесей

Среди численных методов интегрирования уравнений турбулентного движения наиболее разработанными являются конечно-разностные методы.

В тех случаях, когда для замыкания осредненных уравнений турбулентного движения многокомпонентных реагирующих газовых смесей используются алгебраические модели турбулентности (описание на основе уравнений для первых моментов) и не учитывается взаимное влияние турбулентности и кинетики химических реакций (квазиламинарный подход к описанию физико-химических превращений), для решения этих уравнений могут, вообще говоря, использоваться те же численные методы, что и при расчете вязких (ламинарных) течений. При этом, однако, необходимо иметь в виду, что уравнения турбулентного движения являются существенно более нелинейными по сравнению с уравнениями вязкого движения. В частности, при описании течений в рамках приближения пограничного слоя (узкого канала) значительно может различаться характер изменения толщин ламинарного и турбулентного пограничных слоев вниз по потоку, т. е. областей с резким изменением параметров.

Эти и некоторые другие обстоятельства предъявляют к методам расчета турбулентных течений более жесткие требования с точки зрения устойчивости и точности используемых конечно-разностных схем по сравнению с аналогичными требованиями при расчете вязких течений. В связи с этим при расчетах пристенных течений получили распространение конечно-разностные схемы высокого порядка аппроксимации [219, 226, 442] или специальные аналитические и численные преобразования координат [231], обеспечивающие требуемое для достижения заданной точности расчета сгущение узлов конечно-разностной сетки в окрестности твердых стенок.

На начальном этапе разработки численных методов расчета турбулентных течений предпочтение отдавалось явным разностным схемам. Так, в работе Плетчера [435] была предложена явная второго порядка точности разностная схема расчета турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости. Исходные уравнения записывались в физических переменных. Обобщение этого метода на течения сжимаемого газа было дано в монографии В. М. Иевлева [299]. Явные схемы второго порядка точности по поперечной координате и первого — по продольной использованы в работах Брэдшоу, Ферриса [436] и Нг и Коважного [357].

Явные разностные схемы не требуют применения итераций, однако их устойчивость зависит от выбора шага интегрирования в продольном направлении. Этот недостаток не присущ неявным разностным схемам. Наиболее детальное описание неявного конечно-разностного метода интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя применительно к течениям очень широкого класса содержится в работе Патанкара — Сполдинга [225]. Исходные уравнения записываются в модифицированных переменных Мизеса. Все уравнения представляются в виде обобщенного уравнения вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + (a + b\omega) \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left(c \frac{\partial \Phi}{\partial \omega} \right) + d.$$

Подробно анализируются отдельные элементы конечно-разностного метода, в частности, составление разностных уравнений (второй порядок аппроксимации по обоим координатам), описание граничных условий, решение результирующих алгебраических уравнений. Приводится достаточно универсальная программа численного метода на языке Фортран-4. В непосредственной близости от стенки профиль скорости задается в виде закона стенки, поскольку использование переменных Мизеса не обеспечивает достаточной точности решения при $y \rightarrow 0$.

Несколько иная, чем в [225], неявная двухслойная разностная схема с весами рассмотрена в монографии К. К. Федяевского, А. С. Гиневского, А. В. Колесникова [292]. Исходные уравнения в этой работе записывались в физических переменных применительно к течениям несжимаемой жидкости.

Неявная шеститочечная схема с весами, имеющая второй порядок аппроксимации, была применена для интегрирования уравнений турбулентного пограничного слоя в несжимаемой жидкости в работе Ю. Е. Карякина, В. Г. Шарова [437]. Та же схема была использована в работе Ю. Е. Карякина, Ю. В. Лапина [438] для численного интегрирования системы уравнений турбулентного пограничного слоя в равновесно диссоциирующем воздухе. Исходные уравнения записывались в переменных Дородницына — Лиза.

Некоторые модификации метода Патанкара — Сполдинга [225] предложены в работе В. К. Баева, В. И. Головичева, В. А. Ясакова [439] применительно к расчету свободных турбулентных нерав-

новесных течений реагирующих газов. Наряду с подробным описанием конечно-разностного метода приводится программа на языке Фортран.

Конечно-разностная схема типа Кранка — Николсона с неравномерной сеткой второго порядка точности приводится в упомянутой уже выше работе Блотнера [232].

В работе Келлера и Себеси [440] предложена двухслойная неявная схема с аппроксимацией производных центральными разностями. Система разностных уравнений первого порядка относительно приращений искомых функций представляется в матричном виде и решается методом векторной прогонки.

В упомянутой выше монографии Себеси — Смита [226] дано подробное описание неявного конечно-разностного метода с аппроксимациями третьего порядка точности по поперечной координате и первого по продольной (переменные Дородницына — Лиза). В работах [443—445] применительно к различным типам турбулентных вихревых течений использованы методы повышенной (четвертой) степени точности, являющиеся обобщением метода И. В. Петухова [219].

Гораздо более серьезные вычислительные трудности возникают при численном моделировании пристенных турбулентных течений в рамках многопараметрических «дифференциальных» моделей турбулентности, т. е. моделей, в которых для замыкания уравнений осредненного турбулентного движения используются дифференциальные уравнения переноса тех или иных пульсационных характеристик (рейнольдсовых напряжений, масштаба турбулентности, кинетической энергии турбулентных пульсаций, скорости ее диссипации и т. д.). По своей форме эти уравнения аналогичны основным уравнениям переноса осредненных величин. Однако в случае пристенных течений в них присутствуют дополнительные сильно нелинейные генерационные и диссипативные источниковые члены, наличие которых влечет появление дополнительных вычислительных трудностей, сходных по своей математической природе с трудностями, возникающими при расчете околоравновесных режимов течения химически реагирующих смесей. Кроме того, наряду с принципиальными трудностями, связанными с постановкой граничных условий к уравнениям переноса осредненных величин на проницаемых участках границы расчетной области, в случае использования дифференциальных моделей турбулентности возникают дополнительные серьезные проблемы, связанные с заданием граничных условий на проницаемых границах к уравнениям переноса пульсационных характеристик турбулентного движения.

ДОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ

§ 17. Введение

Необходимость детального изучения гидродинамики и тепломассообмена при дозвуковых течениях химически реагирующих газовых смесей в каналах обусловлена запросами целого ряда отраслей техники. В частности, изучение течений по трубам диссоциирующих газовых систем является необходимым этапом разработки высокоэффективных методов охлаждения ядерных реакторов, камер сгорания реактивных двигателей и других теплонапряженных аппаратов. Аналогичная проблема возникает при разработке и оптимизации конструкций некоторых типов проточных газовых лазеров, а также дозвуковых закалочных устройств, которые находят все большее применение в химической и плазмохимической технологии и в лазерной технике. Наконец, задачи оптимизации проточных газофазных химических реакторов, в том числе технологических камер сгорания и трубчатых реакторов пиролиза, также неразрывно связаны с анализом процессов тепломассообмена при дозвуковых течениях газовых смесей в каналах.

Формы движения газовых смесей в каналах весьма разнообразны и существенно зависят как от конфигурации канала, так и от величин основных режимных параметров (чисел Рейнольдса, Дамкёлера, температурного фактора и т. д.). Тем не менее для описания течений в каналах относительно простой геометрии, в частности, в плоских и осесимметричных прямолинейных каналах, во многих случаях может использоваться подробно рассмотренное в п. 6.3.2 гл. 2 приближение узкого канала. В рамках этого приближения удастся не только исследовать основные качественные закономерности, присущие течениям данного класса, но и с приемлемой точностью получить решение ряда сложных прикладных задач при сравнительно небольших затратах машинного времени. Последнее обстоятельство является крайне важным, так как объем расчетов, необходимый для оптимизации тех или иных технических устройств и технологических процессов, как правило, бывает чрезвычайно велик.

Данная глава посвящена рассмотрению различных вычислительных и физических аспектов проблемы моделирования вязких течений газов и газовых смесей в плоских и осесимметричных каналах на основе приближения узкого канала. Значительное внимание

уделено, в частности, исследованию границ применимости этого приближения для описания различных типов канальных течений. Все приводимые результаты получены с помощью неявной двухслойной консервативной конечно-разностной схемы, различные модификации которой с той или иной степенью подробности описаны в работах [446—451]. Однако в процессе длительной эксплуатации этой схемы в нее был внесен ряд существенных изменений, не нашедших отражения в литературе. В связи с этим представляется целесообразным остановиться на основных этапах построения данной схемы и ее численной реализации при решении различных задач о расчете течений газовых смесей в каналах.

§ 18. Метод расчета стационарных двумерных течений химически реагирующих газовых смесей на основе приближения узкого канала

18.1. Преобразование исходной системы уравнений. Перейдем в системе уравнений и граничных условий (2.155) — (2.166), описывающих в рамках приближения узкого канала общий случай ламинарного химически неравновесного течения многокомпонентной газовой смеси в плоских ($\alpha = 0$) и осесимметричных ($\alpha = 1$) каналах, от переменных x, y к переменным

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{y_w(x)}, \quad (4.1)$$

где $y_w(x)$ — безразмерная (отнесенная к своему характерному значению) полувысота (радиус) канала. Преобразование координат (4.1) переводит расчетную область в полосу постоянной (единичной) ширины

$$\eta \in [0, 1] \quad \text{при} \quad y \in [0, y_w(x)], \quad (4.2)$$

что, очевидно, является весьма удобным с точки зрения построения алгоритмов численного интегрирования системы уравнений (2.155) — (2.156).

Формулы перехода от переменных x, y к переменным ξ, η имеют вид

$$x = \xi, \quad y = \eta y_w(\xi), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\eta}{y_w(\xi)} \frac{dy_w}{d\xi} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{y_w(\xi)} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Кроме того, введем безразмерную функцию тока Ψ , удовлетворяющую уравнению неразрывности (2.155)

$$\Psi = \int_0^y \rho u y^\alpha dy; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho u y^\alpha, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\rho v y^\alpha, \quad (4.4)$$

и перейдем в уравнении энергии (2.159) от энтальпии смеси к

полной энтальпии H , связанной с h соотношением (1.69), которое в безразмерных переменных принимает вид

$$H = h + \frac{(\gamma - 1) M^2}{2} u^2. \quad (4.5)$$

Для определения проекций векторов диффузионных потоков компонент смеси на ось y вместо общих выражений (2.161) воспользуемся соотношениями Стефана — Максвелла в форме (2.31) без учета термодиффузии. После перехода к скалярной записи эти соотношения могут быть представлены в следующем безразмерном виде:

$$J_{iy} = -\frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial y} + \delta_{J_{iy}}, \quad B_i = \sum_{j=1}^{N_k} \frac{m c_j}{m_j D_{ij}}, \quad (4.6)$$

$$\delta_{J_{iy}} = \frac{m c_i}{B_i} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{1}{m_j D_{ij}} - \frac{1}{m_i D_{ii}} \right) J_{jy} - \frac{\rho c_i}{m B_i} \frac{\partial m}{\partial y}.$$

Отметим, что при записи (4.6) в соответствии с приближением узкого канала $\frac{\partial p}{\partial y}$ полагается равным нулю.

В качестве продольного линейного масштаба l^0 , входящего в выражение для параметра ε (2.144), удобно принять величину $\text{Re}_r \cdot r^0$, в результате чего ε оказывается тождественно равным Re_r^{-1}

$$\varepsilon = \frac{r^0}{l^0} = \frac{r^0}{\text{Re}_r r^0} = \text{Re}_r^{-1}. \quad (4.7)$$

С учетом (4.1) — (4.7) система уравнений (2.155) — (2.162) может быть представлена в следующей так называемой консервативной или дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) &= (y_w)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \frac{(y_w)^{\alpha+1}}{\gamma M^2} \frac{dp}{d\xi} \eta^\alpha, \quad (4.8) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(H \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(H \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) &= \frac{(y_w)^{\alpha-1}}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{(y_w)^{\alpha-1}}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \eta^\alpha \left[\frac{(\gamma-1) M^2}{2} \left(\text{Pr} \mu - \frac{\lambda}{c_p} \right) \frac{\partial u^2}{\partial \eta} - \sum_{j=1}^{N_k} h_j \left(\frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} J_{j\eta} + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial c_j}{\partial \eta} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_i \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) &= \frac{(y_w)^{\alpha-1}}{\text{Sc}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha \frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} \right) - \\ - \frac{(y_w)^{\alpha-1}}{\text{Sc}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha \delta_{J_{i\eta}} \right) + \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s w_{is} y_w^{\alpha+1} \eta^\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, N_k - 1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где величины $J_{i\eta}$ и $\delta J_{i\eta}$ определяются из (4.6) после перехода в них к переменной η :

$$\begin{aligned} J_{i\eta} &= -\frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} + \delta J_{i\eta}, \\ \delta J_{i\eta} &= \frac{mc_i}{B_i} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{1}{m_j D_{ij}} - \frac{1}{m_i D_{ii}} \right) J_{j\eta} - \frac{\rho c_i}{m B_i} \frac{\partial m}{\partial \eta} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, N_k). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для замыкания системы уравнений (4.8) — (4.10) служит выражение для безразмерной функции тока (4.4) и уравнение баланса массы в канале (2.166). После перехода к новым переменным ξ, η они принимают вид

$$\Psi = (y_w)^{\alpha+1} \int_0^\eta \rho u \eta^\alpha d\eta, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(y_w)^{\alpha+1} \int_0^1 \rho u \eta^\alpha d\eta \right] = -m_f (y_w)^\alpha. \quad (4.13)$$

Кроме того, используется уравнение состояния (2.160) и тождество

$$\sum_{j=1}^{N_k} c_j = 1, \quad (4.14)$$

с помощью которого может быть исключена концентрация одной из компонент смеси.

Граничные условия (2.163) — (2.165) после перехода в них к новым переменным принимают вид

$$u = u_0(\eta), \quad H = H_0(\eta), \quad c_i = c_{i0}(\eta), \quad p = 1 \quad \text{при} \quad \xi = \xi_0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial c_i}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad (4.16)$$

$$u = 0, \quad v = \frac{m_f(\xi)}{\rho}, \quad (4.17.1)$$

$$T = T_w(\xi) \quad \text{или} \quad (4.17.2)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \frac{\lambda}{c_p} \sum_{j=1}^{N_k} h_j \frac{\partial c_j}{\partial \eta} + \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_k} J_{j\eta} h_j + \\ + \text{Pr} m_f y_w \sum_{j=1}^{N_k} [c_j h_j - (c_j h_j)_-] = q_w(\xi) y_w, \end{aligned}$$

$$-\frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial \eta} + \delta J_{i\eta} + \text{Sc} m_f y_w [c_i - (c_i)_-] = y_w \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_{sw} g_{is} \quad (4.17.3)$$

при $\eta = 1$.

Отметим, что при выбранных масштабах для продольных и поперечных координат и составляющих скорости (см. (4.7)) число Рейнольдса Re , не входит в систему уравнений (4.8) — (4.13) и в граничные условия (4.15) — (4.17). Поэтому решения данной системы не зависят от числа Рейнольдса.

Для дальнейшего изложения удобно записать уравнения (4.8) — (4.10) системы (4.8) — (4.13) в следующей единой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) - (y_w)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha A_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = \\ = -B_\Phi (y_w)^{\alpha+1} \eta^\alpha \frac{dp}{d\xi} - (y_w)^{\alpha-1} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta^\alpha C_\Phi) + (y_w)^{\alpha+1} \eta^\alpha (D_\Phi + E_\Phi \Phi), \end{aligned} \quad (4.18)$$

а граничные условия (4.15) — (4.17) — в форме

$$\Phi = \Phi_0(\eta) \quad \text{при} \quad \xi = \xi_0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при} \quad \eta = 0, \quad (4.20)$$

$$a_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + b_\Phi \Phi + c_\Phi = d_\Phi \quad \text{при} \quad \eta = 1, \quad (4.21)$$

где Φ — любая из искоемых функций (u , H , c_i), а выражения для коэффициентов в (4.18), (4.21) приведены в табл. 4.1, 4.2 соответственно.

Коэффициенты D_{c_i} и E_{c_i} в уравнениях переноса массы отдельных компонент смеси, т. е. величины Ω_i и ω_i (см. табл. 4.1) определяются из соотношения

$$\Omega_i + c_i \omega_i = \sum_{s=1}^{N_R} Da_s w_{is} \quad (4.22)$$

и общего выражения для скорости образования i -й компоненты смеси в результате протекания химических реакций (2.7):

$$\begin{aligned} \Omega_i = m_i \left[\sum_{\substack{s=1 \\ v''_{is} > v'_{is}}}^{N_R} (v''_{is} - v'_{is}) Da_s k_s^+ \rho^{\sum_{j=1}^{N_k} v''_{js}} \prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v'_{js}} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{s=1 \\ v''_{is} < v'_{is}}}^{N_R} (v''_{is} - v'_{is}) Da_s k_s^+ \rho^{\sum_{j=1}^{N_k} v''_{js}} \frac{K_s}{K_{ps}} (pm)^{\sum_{j=1}^{N_k} (v''_{js} - v'_{js})} \prod_{j=1}^{N_k} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v''_{js}} \right], \end{aligned} \quad (4.23)$$

Таблица 4.1

Φ	$A\Phi$	$B\Phi$	$C\Phi$	$D\Phi$	$E\Phi$
u	μ	1	0	0	0
H	$\frac{1}{Pr} \frac{\lambda}{c_p}$	0	$-\frac{1}{Pr} \frac{(\gamma-1) M^2}{2} \left[\left(Pr \mu - \frac{\lambda}{c_p} \right) \frac{\partial u^2}{\partial \eta} - \sum_{j=1}^{N_k} h_j \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{Pr}{Sc} J_{j\eta} + \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial c_j}{\partial \eta} \right) \right]$	0	0
c_i	$\frac{1}{Sc} \frac{\rho}{B_i}$	0	$\frac{1}{Sc} \delta_{J_i \eta}$	Ω_i	ω_i

Таблица 4.2

Φ	$a\Phi$	$b\Phi$	$c\Phi$	$d\Phi$
u	0	1	0	0
H	0	1	$-\sum_{j=1}^{N_k} c_j h_j$	0
	$-\frac{\lambda}{c_p}$	0	$\frac{\lambda}{c_p} \sum_{j=1}^{N_k} h_j \frac{\partial c_j}{\partial \eta} + \frac{Pr}{Sc} \sum_{j=1}^{N_k} J_{j\eta} h_j + Pr m_j y_w \sum_{j=1}^{N_k} c_j h_j$	$Pr m_j y_w \sum_{j=1}^{N_k} (c_j h_j) - q_w y_w$
	$-\frac{\rho}{B_i}$	$Sc m_j y_w$	$\delta_{J_s \eta} - y_w \sum_{s=1}^{N_{RW}} Da_s g_{is}$	$Sc m_j y_w (c_i)$

$$\omega_i = m_i \left[\sum_{\substack{s=1, \\ v_{is}'' < v_{is}'}}^{N_R} (v_{is}'' - v_{is}') Da_s k_s^+ \rho^{\sum_{j=1}^{N_k} v_{js}'} \left(\frac{c_i}{m_i} \right)^{v_{is}'-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v_{js}'} - \right. \\ \left. - \sum_{\substack{s=1, \\ v_{is}'' > v_{is}'}}^{N_R} (v_{is}'' - v_{is}') Da_s k_s^+ \rho^{\sum_{j=1}^{N_k} v_{js}''} \frac{K_s}{K_{ps}} \left(\frac{c_i}{m_i} \right)^{v_{is}''-1} (pm)^{\sum_{j=1}^{N_k} (v_{js}'' - v_{js}')} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_k} \left(\frac{c_j}{m_j} \right)^{v_{js}''} \right]. \quad (4.24)$$

Из (4.23), (4.24) видно, что независимо от кинетической модели рассматриваемого процесса справедливы неравенства

$$\Omega_i > 0, \quad \omega_i < 0, \quad (4.25)$$

выполнение которых является весьма существенным с точки зрения повышения эффективности рассматриваемой в следующем разделе конечно-разностной схемы *).

При расчете химически равновесных течений (см. п. 6.4) N_s уравнений переноса массы компонент смеси заменяются уравнениями переноса массы ее элементов (2.172) **). В рамках приближения узкого канала для рассматриваемого случая стационарного плоского или осесимметричного течения эти уравнения после введения функции тока Ψ и перехода к переменным ξ, η принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(c_k^* \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(c_k^* \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) = \\ = \frac{(y_w)^{\alpha-1}}{Sc} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha \frac{\rho}{B_k^*} \frac{\partial c_k^*}{\partial \eta} \right) - \frac{(y_w)^{\alpha-1}}{Sc} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta^\alpha \delta_{J_{k\eta}}^* \right) \quad (k = 1, 2, \dots, N_s). \quad (4.26)$$

При записи (4.26) для определения диффузионных потоков элементов $J_{k\eta}^*$ используются соотношения

$$J_{k\eta}^* = - \frac{\rho}{B_k^*} \frac{\partial c_k^*}{\partial \eta} + \delta_{J_{k\eta}}^*, \\ \delta_{J_{k\eta}}^* = \sum_{j=1}^{N_k} c_{kj} \left[\left(\frac{1}{B_k^*} - \frac{1}{B_j} \right) \frac{\partial c_j}{\partial \eta} + \delta_{J_{j\eta}} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, N_s), \quad (4.27)$$

где B_k^* полагается равным коэффициенту B_j (см. (4.6)) для той из компонент, содержание в которой k -го элемента является

*) См. формулу (2.29) гл. 2 и комментарии к ней.

**) Использование этих уравнений вместо N_s уравнений переноса массы компонентов в ряде случаев может оказаться полезным и при расчете химически неравновесных течений.

максимальным. Эти соотношения получены из (4.11) путем несложных тождественных преобразований.

Граничные условия к уравнениям переноса массы элементов (4.26) на стенках канала (2.173) после перехода в них к переменным ξ , η с использованием (4.27) могут быть представлены в форме

$$-\frac{\rho}{B_k^*} \frac{\partial c_k^*}{\partial \eta} + \delta_{J_{k\eta}}^* + Sc m_{fyw} [c_k^* - (c_k^*)_+] = 0 \quad \text{при } \eta = 1. \quad (4.28)$$

Уравнения переноса массы элементов (4.26) и граничные условия (4.28), очевидно, можно записать в общей форме (4.18), (4.21). Выражения для коэффициентов (4.18), (4.21) при $\Phi = c_k^*$ представлены в табл. 4.3, 4.4 соответственно.

Таблица 4.3

Φ	A_Φ	B_Φ	C_Φ	D_Φ	E_Φ
c_k^*	$\frac{1}{Sc} \frac{\rho}{B_k^*}$	0	$\frac{1}{Sc} \delta_{J_{k\eta}}^*$	0	0

Таблица 4.4

Φ	a_Φ	b_Φ	c_Φ	d_Φ
c_k^*	$-\frac{\rho}{B_k^*}$	$Sc m_{fyw}$	$\delta_{J_{k\eta}}^*$	$Sc m_{fyw} (c_k^*)_+$

18.2. Конечно-разностная схема и алгоритм расчета химически неравновесных течений. Для получения конечно-разностных аналогов уравнений (4.18) и граничных условий (4.19) — (4.21) введем

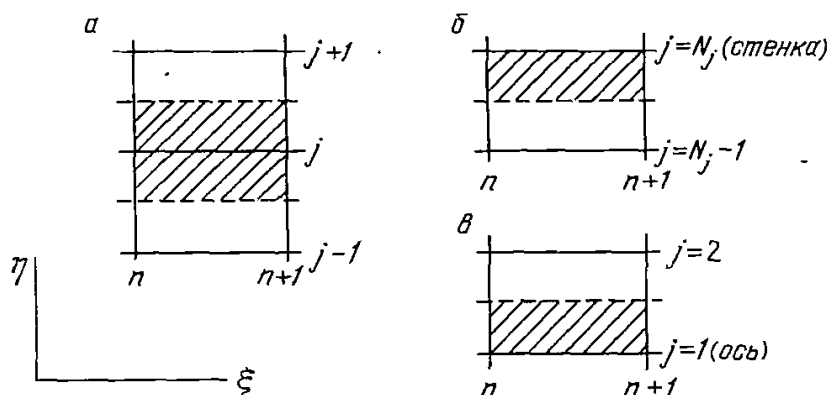


Рис. 4.1. Шаблон конечно-разностной схемы

на плоскости ξ , η ($\xi \in [0, \xi_{\text{вых}}]$, $\eta \in [0, 1]$) сетку с узлами ξ_n , η_j (рис. 4.1).

В соответствии с интегральным методом [32]*) проинтегрируем уравнение (4.18) по площади ячейки, отмеченной на рис. 4.1, а

*) По-видимому, впервые этот метод был использован для получения разностных аналогов уравнений пограничного слоя в работе В. В. Щенникова [222].

штриховкой. В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \right) d\eta - \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right) d\xi}_{\text{конвективные члены}} - \underbrace{\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^{\alpha-1} \left(\eta^\alpha A_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) d\xi}_{\text{диффузионные члены}} - \\
 & \underbrace{- \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \eta^\alpha \left(\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^{\alpha+1} \Phi E_\Phi d\xi \right) d\eta}_{\text{источник № 1}} = \\
 & = - B_\Phi \underbrace{\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^{\alpha+1} \frac{dp}{d\xi} \frac{1}{(\alpha+1)} \left(\eta_{j+\frac{1}{2}}^{\alpha+1} - \eta_{j-\frac{1}{2}}^{\alpha+1} \right) d\xi}_{\text{источник № 2}} - \\
 & - \underbrace{\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^{\alpha-1} (\eta^\alpha C_\Phi) d\xi}_{\text{источник № 3}} + \underbrace{\int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \eta^\alpha \left(\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^{\alpha+1} D_\Phi d\xi \right) d\eta}_{\text{источник № 4}}. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Оставшиеся в (4.29) интегралы возьмем численно. Для этого воспользуемся теоремой о среднем в форме

$$\int_a^b F(x) \Phi(x) dx = F(\tilde{x}) \int_a^b \Phi(x) dx, \quad \tilde{x} \in [a, b],$$

причем в тех случаях, когда это возможно, функцию $F(x)$ будем выбирать таким образом, чтобы $\int_a^b \Phi(x) dx$ брался точно. При инте-

грировании по η будем полагать $F(\tilde{\eta})$ равной $F(\eta_j)$, а при интегрировании по ξ — равной $F(\tilde{\xi}) = \sigma F(\xi_{n+1}) + (1-\sigma)F(\xi_n)$, где $0,5 \leq \sigma \leq 1$.

Кроме того, будем предполагать, что значения тех интегралов по ξ , которые не могут быть взяты аналитически (диффузионные члены, источники № 1, 3, 4), равны произведению промежутка интегрирования $\Delta \xi_n = \xi_{n+1} - \xi_n$ на средневзвешенное значение подынтегральной функции на концах промежутка, т. е.

$$\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} F(\xi) d\xi = \Delta \xi_n [\sigma F(\xi_{n+1}) + (1 - \sigma) F(\xi_n)], \text{ например,}$$

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \eta^\alpha \left(\int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^\alpha D_\Phi d\xi \right) d\eta &= \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} (y_w)^\alpha (D_\Phi)_j d\xi \cdot \int_{\eta_{j-\frac{1}{2}}}^{\eta_{j+\frac{1}{2}}} \eta^\alpha d\eta = \\ &= \Delta \xi_n [\sigma (y_w(\xi_{n+1}))^\alpha (D_\Phi)_j^{n+1} + (1 - \sigma) (y_w(\xi_n))^\alpha (D_\Phi)_j^n] \frac{1}{\alpha + 1} \left(\eta_{j+\frac{1}{2}}^{\alpha+1} - \eta_{j-\frac{1}{2}}^{\alpha+1} \right). \end{aligned}$$

Здесь F_j^n — значения сеточных функций в узлах сетки с координатами ξ_n, η_j , т. е. $F_j^n = F_h(\xi_n, \eta_j)$.

Наконец, для определения функций Φ, Ψ и других зависящих от них переменных (μ, λ и т. д.) во вспомогательных (полуцелых) узлах сетки по η используется линейная интерполяция по значениям соответствующих переменных в основных узлах, т. е. предполагается, что $F_{j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(F_j + F_{j\pm 1})$, а производные $\partial\Phi/\partial\eta$, входящие в коэффициенты C_Φ (см. табл. 4.1), аппроксимируются в полуцелых точках центральными разностями, т. е. $(\partial\Phi/\partial\eta)_{j+\frac{1}{2}} = (\Phi_{j+1} - \Phi_j)/(\eta_{j+1} - \eta_j)$.

С учетом перечисленных допущений, использование которых обеспечивает первый порядок аппроксимации исходных уравнений (4.18) по переменной η и первый (при $\sigma > 0,5$) или второй (при $\sigma = 0,5$) — по переменной ξ , после взятия интегралов в (4.29) и приведения подобных членов получим следующую систему уравнений:

$$(P_\Phi)_j \Phi_{j+1}^{n+1} + (Q_\Phi)_j \Phi_j^{n+1} + (R_\Phi)_j \Phi_{j-1}^{n+1} = (S_\Phi)_j - (T_\Phi)_j p^{n+1} \quad (4.30)$$

$$(j = 2, 3, \dots, N_j - 1).$$

Величины диффузионных потоков компонент и элементов смеси в полуцелых по η узлах сетки, входящие в коэффициенты $(S_\Phi)_j$, определяются из конечно-разностных аналогов соотношений Стефана — Максвелла (4.11), (4.27). Например,

$$(J_{in})_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = - \frac{\rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} [(c_i)_{j+1}^{n+1} - (c_i)_j^{n+1}]}{(B_i)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} (\eta_{j+1} - \eta_j)} + (\delta_{J_{in}})_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad (4.31.1)$$

$$\begin{aligned} (\delta_{J_{in}})_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \frac{(c_i)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{(B_i)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} \sum_{l=1}^{N_k} (J_{il})_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} m_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \left[\frac{1}{(D_{il})_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} m_l} - \frac{1}{(D_{ii})_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} m_i} \right] - \\ &\quad - \frac{\rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} c_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}}{(B_i)_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}} \frac{(m_{j+1}^{n+1} - m_j^{n+1})}{m_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} (\eta_{j+1} - \eta_j)}. \quad (4.31.2) \end{aligned}$$

Наконец, значения функции тока Ψ в узлах сетки определяются из (4.12) по формуле трапеций:

$$\Psi_1^{n+1} = 0, \quad (4.32)$$

$$\Psi_j^{n+1} = \Psi_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{2} (y_w^{n+1})^\alpha [(\rho u)_j^{n+1} \eta_j^\alpha + (\rho u)_{j-1}^{n+1} \eta_{j-1}^\alpha] (\eta_j - \eta_{j-1}),$$

а конечно-разностный аналог уравнения баланса массы в канале (4.13) записывается в виде

$$\Psi_{N_j}^{n+1} - \Psi_{N_j}^n = - [\sigma m_f^{n+1} (y_w^{n+1})^\alpha + (1 - \sigma) m_f^n (y_w^n)^\alpha] \Delta \xi_n. \quad (4.33)$$

Для замыкания системы алгебраических уравнений (4.30) — (4.33) используются разностные аналоги граничных условий (4.19) — (4.21). При этом распределение всех параметров потока на входе в канал ($n=0$), а также распределения вдоль стенок ($j=N_j$) тех из них, для которых заданы граничные условия первого рода, непосредственно заменяются своими дискретными аналогами.

Для реализации остальных граничных условий, так же как и при построении разностных аналогов исходных дифференциальных уравнений во внутренних точках области, используется интегральный метод. При этом уравнение (4.18) интегрируется по площади ячеек, прилежащих к оси (рис. 4.1, в) и к стенкам (рис. 4.15) канала, аналогично тому, как оно интегрировалось по площади внутренних ячеек (рис. 4.1, а). Разница состоит лишь в том, что при этом используются условия (4.20) и (4.21), позволяющие исключить часть членов в полученных при интегрировании соотношениях. После приведения подобных членов последние могут быть представлены в форме

$$(P_\Phi)_1 \Phi_2^{n+1} + (Q_\Phi)_1 \Phi_1^{n+1} = (S_\Phi)_1 - (T_\Phi)_1 p^{n+1}, \quad (4.34)$$

$$[(Q_\Phi)_{N_j} + (Q_\Phi)_w] \Phi_{N_j}^{n+1} + (R_\Phi)_{N_j} \Phi_{N_j-1}^{n+1} = (S_\Phi)_{N_j} + (S_\Phi)_w. \quad (4.35)$$

Таким образом, получена замкнутая система нелинейных алгебраических уравнений относительно значений искомых функций Φ_j^{n+1} ($j=1, 2, \dots, N_j$) и p^{n+1} , которая включает (N_j-2) уравнений (4.30) и уравнения (4.33) — (4.35), а также соотношения (4.31), (4.32) и выражения, необходимые для определения входящих в них коэффициентов.

Эта система решается с помощью алгоритма скалярной прогонки с итерациями по нелинейным членам уравнений. Основные этапы расчета сводятся при этом к следующему.

1. С помощью формулы (4.32) производится расчет значений функции тока на новом (неизвестном) слое по $\xi - \Psi_j^{n+1}$ в первом приближении. При этом неизвестные значения ρ_j^{n+1} и u_j^{n+1} , входящие в правую часть (4.32), заменяются соответствующими значениями ρ_j^n и u_j^n на предыдущем шаге (при $n=1$) или величинами

$(\rho_j^{n+1})_{\text{ex}}$ и $(u_j^{n+1})_{\text{ex}}$, определяемыми путем линейной экстраполяции решения, полученного на двух предыдущих шагах (при $n \geq 2$).

2. С помощью метода скалярной прогонки последовательно (для $\Phi = u, H, c_i, c_k^*$) решаются уравнения (4.30), (4.34), (4.35). Значения коэффициентов этих уравнений, зависящих от искомых параметров на $(n+1)$ -м слое по ξ , определяются при этом аналогично тому, как рассчитывалась правая часть (4.32). В результате определяются значения $u_j^{n+1}, H_j^{n+1}, (c_i)_j^{n+1}$ и $(c_k^*)_j^{n+1}$ (при $j = 1, 2, \dots, N_j$) в первом приближении.

3. По известным в первом приближении значениям основных искомых функций на слое $n+1$ с помощью соотношения (4.5) и уравнения состояния (3.160) рассчитываются температура и плотность смеси T_j^{n+1} и ρ_j^{n+1} , определяются коэффициенты переноса, а затем с помощью соотношений (4.31) — величины диффузионных потоков компонент и элементов смеси в первом приближении (при определении величин $\delta J_{i\eta}$ в (4.31.2) при $i = i'$ используются уже найденные значения $J_{i\eta}$ при $l < i'$ на текущей итерации, т. е. используется процедура типа метода Зейделя, см. (3.31)).

4. Весь расчет повторяется, начиная с п. 1, с той только разницей, что правая часть (4.30) и коэффициенты (4.30) вычисляются по значениям параметров потока на $(n+1)$ -м слое по ξ , определенным на предыдущей итерации.

Расчет на текущем слое по ξ считается законченным после того, как достигнуто выполнение условий сходимости итераций

$$\left| \frac{(\Phi_j^{n+1})^{k+1} - (\Phi_j^{n+1})^k}{(\Phi_j^{n+1})^{k+1}} \right| \leq \varepsilon, \quad (4.36)$$

где ε — некоторая малая величина (обычно при проведении расчетов ε полагается равным 10^{-3}), а k — номер итерации.

Далее расчет по описанному алгоритму повторяется для следующего слоя по ξ вплоть до $\xi = \xi_{\text{вых}}$.

Остановимся более подробно на численном интегрировании уравнения (4.30) при $\Phi = u$, поскольку в этом случае в правую часть уравнения входит неизвестное значение давления p^{n+1} , в связи с чем стандартный алгоритм прогонки оказывается неприемлемым.

Для преодоления указанного затруднения в случае дозвуковых течений используется модификация алгоритма прогонки, впервые предложенная Л. М. Симуни в работе [228] и состоящая в следующем.

В соответствии со стандартным методом прогонки решение уравнения (4.30) при $\Phi = u$ с использованием разностных аналогов граничных условий на оси (плоскости) симметрии (4.34) может быть представлено в форме

$$u_{j-1}^{n+1} = p_j u_j^{n+1} + q_j - r_j p^{n+1} \quad (j = 2, 3, \dots, N_j), \quad (4.37)$$

где

$$\begin{aligned} p_{j+1} &= \frac{-(P_u)_j}{(Q_u)_j + (R_u)_j p_j}, & q_{j+1} &= \frac{(S_u)_j - (R_u)_j q_j}{(Q_u)_j + (R_u)_j p_j}, \\ r_{j+1} &= \frac{(T_u)_j - (R_u)_j r_j}{(Q_u)_j + (R_u)_j p_j} & (j = 2, 3, \dots, N_j - 1), \\ p_2 &= -\frac{(P_u)_1}{(Q_u)_1}, & q_2 &= \frac{(S_u)_1}{(Q_u)_1}, & r_2 &= \frac{(T_u)_1}{(Q_u)_1}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Воспользовавшись граничным условием для продольной составляющей скорости на стенках канала $u_{N_j}^{n+1} = 0$, нетрудно привести (4.37) к виду

$$u_j^{n+1} = G_j + K_j p^{n+1}, \quad (4.39)$$

где

$$\begin{aligned} G_{j-1} &= p_j G_j + q_j, & K_{j-1} &= p_j K_j - r_j \text{ при } j = 2, 3, \dots, N_j, \\ G_{N_j} &= K_{N_j} = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Подставляя u_j^{n+1} из (4.39) в правую часть (4.32) и используя затем уравнение баланса массы газа в канале (4.33), получим следующее соотношение для определения давления на $(n+1)$ -м слое по ξ :

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= \left\{ \left[\Psi_{N_j}^n - (\sigma m_f^{n+1} (y_w^{n+1})^\alpha + (1 - \sigma) m_f^n (y_w^n)^\alpha) \Delta \xi_n \right] \frac{2}{(y_w^{n+1})^\alpha} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=2}^{N_j} [\eta_k^\alpha \rho_{k+1}^{n+1} G_k + \eta_{k-1}^\alpha \rho_{k-1}^{n+1} G_{k-1}] (\eta_k - \eta_{k-1}) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=2}^{N_j} [\eta_k^\alpha \rho_k^{n+1} K_k + \eta_{k-1}^\alpha \rho_{k-1}^{n+1} K_{k-1}] (\eta_k - \eta_{k-1}) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

После того как на первом этапе алгоритма определены значения функции тока Ψ_j^{n+1} на текущей итерации, с помощью этого соотношения рассчитывается соответствующее значение p^{n+1} (при этом все величины, входящие в правую часть (4.41) и зависящие от параметров потока на $(n+1)$ -м слое по ξ , определяются по их значениям на предыдущей итерации), а затем с помощью (4.38) — (4.40) определяется профиль скорости u_j^{n+1} на текущей итерации. Далее расчет ведется по описанному выше алгоритму.

Опыт расчетов с использованием описанной процедуры определения p^{n+1} из уравнения (4.41) свидетельствует о том, что в слу-

чае рассматриваемых в настоящем разделе дозвуковых режимов течения она всегда оказывается сходящейся*).

18.3. Алгоритм расчета химически равновесных течений. При анализе течений газовых смесей с быстропротекающими химическими реакциями ($Da_s \gg 1$) весьма полезной оказывается модель химически равновесного течения (см. п. 6.4), в рамках которой уравнения переноса массы отдельных компонент смеси заменяются условиями детального химического равновесия Гульдберга — Вааге (2.171).

Изменения, которые необходимо внести в этом случае в описанный в предыдущем разделе алгоритм расчета химически неравновесных течений на основе приближения узкого канала, сводятся к следующему.

В каждом итерационном цикле, после определения из (4.30), (4.34), (4.35) при $\Phi = u$, H и c_k^* соответственно значения давления p^{n+1} и профилей скорости u_j^{n+1} , энтальпии смеси H_j^{n+1} и концентраций элементов $(c_k^*)_j^{n+1}$ (2-й этап описанного выше алгоритма) в каждой точке сетки на $(n+1)$ -м слое по продольной координате методом Ньютона решается система нелинейных алгебраических уравнений, включающая $N_k - N_a$ дискретных аналогов условий химического равновесия (2.171), N_a соотношений, связывающих концентрации элементов и компонент смеси

$$(c_k^*)_j^{n+1} = \sum_{l=1}^{N_k} c_{kl} (c_l)_j^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N_a, \quad (4.42)$$

где $(c_k^*)_j^{n+1}$ — уже известные концентрации элементов на $(n+1)$ -м слое по ξ на текущей итерации, а также соотношение, связывающее энтальпию смеси с ее температурой и составом:

$$h_j^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_k} (c_i)_j^{n+1} h_i(T_j^{n+1}), \quad (4.43)$$

где $h_j^{n+1} = H_j^{n+1} - \frac{(\gamma-1)M^2}{2} (u_j^{n+1})^2$ — известное из решения уравнений переноса полной энтальпии и импульса значение энтальпии на $(n+1)$ -м слое по ξ на текущей итерации.

В результате решения системы уравнений (2.171), (4.42), (4.43) определяются значения N_k концентраций компонент смеси $(c_i)_j^{n+1}$ и температуры смеси T_j^{n+1} . После этого весь итерационный цикл повторяется вплоть до достижения сходимости итераций, т. е. выполнения условий (4.36).

*) В случае, когда течение в канале является сверхзвуковым, для обеспечения сходимости итераций необходимо исключить значения ρ_k^{n+1} , входящие в правую часть (4.41), с помощью уравнения состояния (2.160), т. е. заменить ρ_k^{n+1} на величину $p^{n+1} m_k^{n+1} / T_k^{n+1}$ и разрешить полученное в результате квадратное уравнение относительно p^{n+1} [230].

18.4. Расчет турбулентных режимов течения. При использовании для описания процессов турбулентного обмена алгебраических моделей турбулентности (§ 11, 12) различия методов расчета турбулентных течений и описанных в предыдущих разделах методов расчета ламинарных течений проявляются лишь на стадии формирования конечно-разностной сетки (как отмечалось в § 16, из-за резкого изменения параметров потока в пристеночной области при турбулентном режиме течения для получения достаточно точного решения необходим более мелкий, чем при ламинарном течении, шаг интегрирования по поперечной координате).

В случае использования для замыкания осредненных уравнений переноса «дифференциальных» моделей турбулентности (§ 13) формальные различия в постановке задач о расчете турбулентных и ламинарных течений оказываются более существенными, что влечет за собой необходимость модификации описанных выше алгоритмов расчета. Одна из таких модификаций, предназначенная для расчета турбулентных течений газовых смесей в каналах с использованием $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентности Лаундера и Джонса [390], предложена в работе [451]. Не останавливаясь на деталях алгоритма [451], весьма близкого по своей структуре к алгоритму расчета ламинарных течений химически неравновесных газовых смесей, подробно описанному в п. 18.2, отметим только, что специфические трудности, связанные с численным интегрированием уравнений переноса кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации в модели Джонса — Лаундера (они сходны по своей природе с проанализированными в п. 5.3.3 трудностями расчета околоравновесных течений газовых смесей), удастся преодолеть путем представления источниковых членов в уравнениях переноса k и ε в форме, аналогичной (2.29).

§ 19. Границы применимости приближения узкого канала для численного моделирования стационарных дозвуковых течений в плоских и осесимметричных каналах

19.1. Предварительные замечания. Допущения физического характера, лежащие в основе различных моделей внутренних течений вязких газов и газовых смесей, и вытекающие из этих допущений качественные оценки границ применимости этих моделей были подробно рассмотрены в § 6. Однако для обоснованного использования той или иной приближенной модели при решении прикладных задач таких качественных оценок, очевидно, недостаточно. Наряду с ними необходимы количественные данные о зависимости погрешностей, обусловленных использованием приближенных моделей, от величин определяющих параметров изучаемого процесса. Эти данные могут быть получены путем систематического сопоставления результатов расчетов, выполненных в рамках приближенных

моделей, с аналогичными результатами, полученными на основе полной системы уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9), и с результатами соответствующих физических экспериментов. К сожалению, такого рода методические численные исследования являются чрезвычайно трудоемкими, а их результаты не могут быть исчерпывающими в силу исключительного многообразия газовых систем и условий течения, реализуемых на практике. Тем не менее даже ограниченные количественные данные о границах применимости различных приближенных моделей внутренних течений, полученные в результате указанных исследований, в сочетании с общими предпосылками для использования этих моделей, проанализированными в § 6, позволяют во многих случаях провести априорную оценку и обоснованный выбор приближенной модели изучаемого процесса, что значительно повышает эффективность практического использования методов вычислительной гидроаэродинамики.

Ниже приводятся результаты численных методических исследований, выполненных с целью оценки возможности применения приближения узкого канала в сочетании с конечно-разностной схемой, описанной в предыдущем параграфе, для моделирования некоторых типов стационарных дозвуковых течений в каналах.

19.2. Неизотермическое течение на начальном участке трубы постоянного сечения с непроницаемыми стенками [168, 452]. Использование для численного моделирования течений данного класса приближения узкого канала является, вообще говоря, не вполне оправданным даже при достаточно больших значениях числа Рейнольдса Re_i , так как на некотором участке трубы локальный продольный масштаб l^0 (расстояние от входа в трубу до рассматриваемого сечения) и поперечный масштаб r_w^0 (радиус трубы) имеют одинаковый порядок, т. е. условие (2.144) не выполняется. Тем не менее приближение узкого канала широко применяется в настоящее время для решения самых разнообразных задач, связанных с расчетом сопротивления и теплообмена при течении вязких газов и газовых смесей на начальном участке различных каналов. Характер и масштабы вносимых при этом погрешностей иллюстрируют рис. 4.2—4.6, на которых представлены полученные в рамках приближения узкого канала и на основе модели (2.122) — (2.130) (последняя рассматривается в качестве «эталонной»)*) результаты расчетов течения однородного вязкого газа (воздуха) на участке гидродинамической и тепловой стабилизации круглой трубы при граничных условиях для температуры на стенках первого рода (рис. 4.2, 4.3) и течения химически реагирующей газовой смеси (неравновесно диссоциирующей по схеме $2NO_2 \rightleftharpoons 2NO + O_2$ двуокиси азота) на тепловом начальном участке круглой трубы при температурных граничных условиях второго рода (рис. 4.4—4.6).

*) Как будет показано в гл. 6 (§ 26), при $M^2 \leq 10^{-2}$ данная модель практически не уступает по точности полной системе уравнений Навье — Стокса.

Не останавливаясь на деталях постановки соответствующих задач (они приведены в [168, 452]), прокомментируем лишь наиболее существенные с точки зрения оценки границ применимости приближения узкого канала результаты проведенных численных исследований.

Как видно из рис. 4.2, 4.3, погрешности, обусловленные использованием приближения узкого канала для описания течения однородного вязкого газа на начальном участке трубы, могут быть весьма

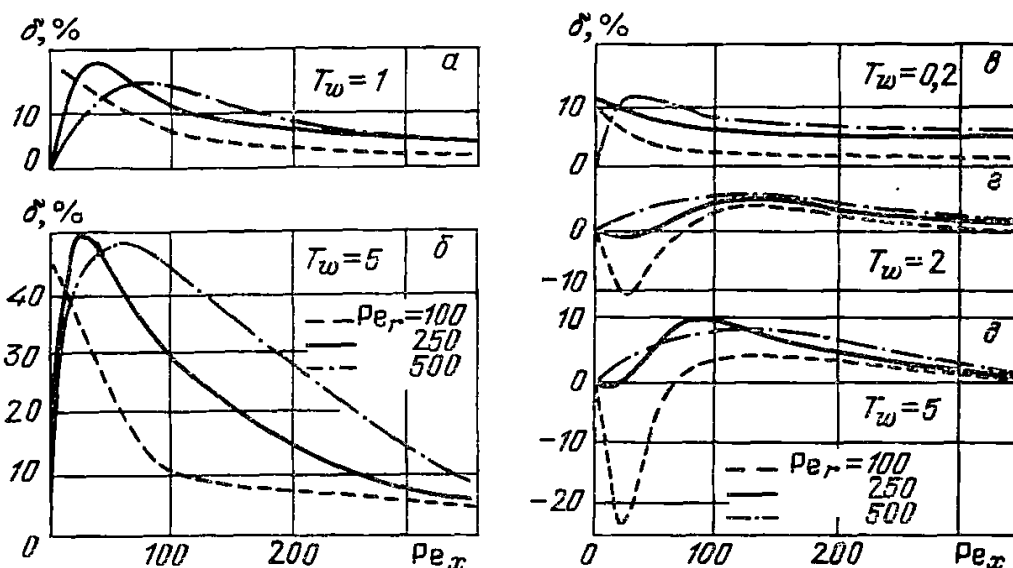


Рис. 4.2. Зависимость погрешности расчета в рамках приближения узкого канала коэффициента сопротивления (а, б) и числа Нуссельта (в, г, д) от числа Pe_x при различных значениях числа Pe_r и температурного фактора T_w

значительными. Так, погрешность расчета числа Нуссельта в рассмотренном диапазоне изменения T_w и числа Пекле $Pe_r = Re_r Pr$ достигает 25 %, а погрешность расчета трения на стенках — 50 % (см. рис. 4.2).

В фиксированном сечении трубы погрешности определения параметров потока в рамках приближения узкого канала уменьшаются с ростом числа Pe_r (или, что то же самое, Re_r) и увеличиваются с ростом температурного фактора T_w (см. рис. 4.3), что находится в полном соответствии с качественным анализом границ применимости приближения узкого канала, проведенным в п. 6.3.2.

В случае изотермического течения погрешность расчета коэффициента трения при фиксированном значении $Pe_x = Pe_r \frac{x'}{r_w^0}$ (x' — размерная координата) слабо зависит от Pe_r и при $Pe_x \geq 250$ не превышает 5 %. Именно это значение Pe_x было рекомендовано на основании приближенных оценок в работе В. Д. Виленского, Б. С. Петухова и Б. Е. Харина [453] в качестве границы применимости приближения узкого канала при расчете течения на начальном участке трубы. Однако при неизотермическом течении универ-

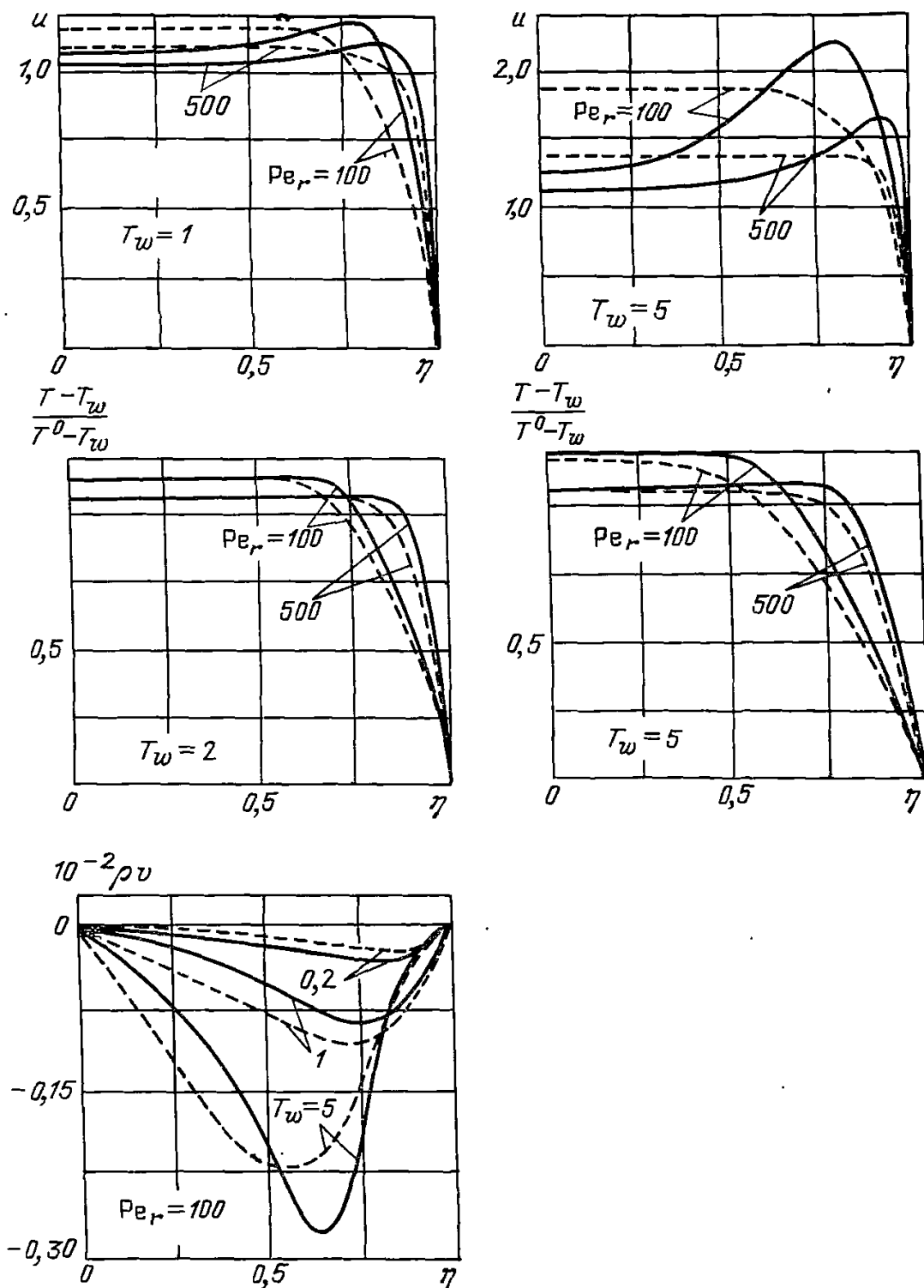


Рис. 4.3. Влияние числа Пекле и температурного фактора на параметры течения на начальном участке трубы в сечении $x/d = 0,2$ при $M = 10^{-2}$: сплошная линия — расчет на основе модели (2.122) — (2.129), штриховая — в рамках приближения узкого канала

сальное (не зависящее от T_w и Re_r) значение параметра Re_x , начиная с которого использование приближения узкого канала не вносит существенных погрешностей в расчет рассматриваемого класса течений, указать не удастся (см. рис. 4.2). Можно лишь утверждать, что в изученном диапазоне изменения T_w и Re_x ($T_w = 0,2 \div 5$; $Re_r = 100 \div 500$) использование приближения узкого канала является

оправданным (приводит к погрешностям, не превышающим 5 %) при $Re_x \geq 400$ и что при дальнейшем увеличении T_w и Re_r эта граница будет сдвигаться в сторону больших значений Re_x . Кроме того, следует отметить, что погрешность, обусловленная использованием приближения узкого канала при расчете динамических характеристик рассматриваемого течения (сопротивления трения, профилей скорости), оказывается существенно выше соответствующей погрешности в определении температуры и интенсивности теплообмена.

Правомерность распространения сформулированных выше выводов относительно границ применимости приближения узкого канала при расчете течения однородного вязкого газа на случай течения химически реагирующих газовых смесей иллюстрируют рис. 4.4—4.6. На этих рисунках представлены типичные результаты расчетов течения диссоциирующей двуокиси азота в круглой обогреваемой трубе, полученные в рамках приближения узкого канала и на основе модели (2.122)—(2.130) при условиях, для которых, судя по результатам расчетов течения однородного газа, приближение узкого канала должно обеспечивать приемлемую точность определения всех характеристик потока. Приведенные на рисунках данные полностью подтверждают это: максимальное различие результатов расчетов, полученных в рамках обеих моделей, имеет место для поперечной составляющей вектора скорости, однако и оно не превышает 15 %. Различие же в температуре стенки и числе Нуссельта, т. е. в величинах, представляющих для рассматриваемого течения наибольший практический интерес, не превышает 5 % во всем рассмотренном диапазоне изменения числа Рейнольдса и безраз-

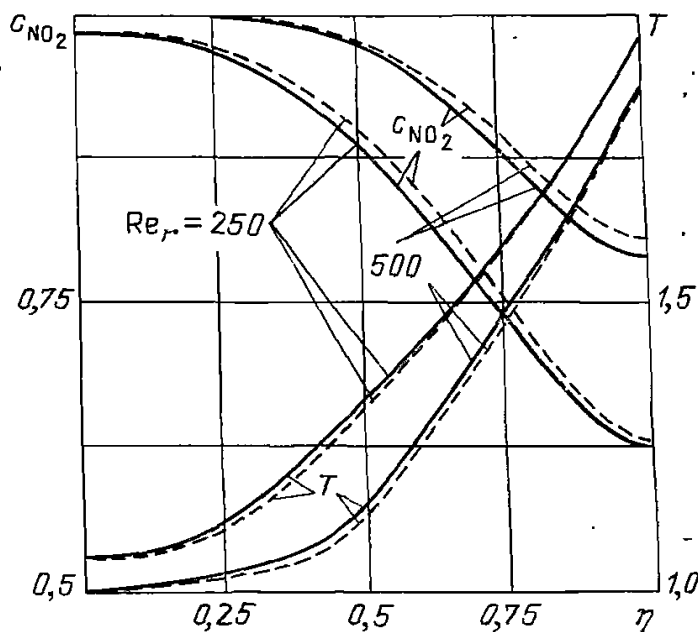


Рис. 4.4. Профили концентрации двуокиси азота и температуры в сечении $x/d = 2,2$ обогреваемой трубы при $q_w = 4$, $M = 10^{-2}$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

мерного теплового потока в стенку трубы ($Re_r = 200-500$, $\bar{q}_w = \frac{q_w^0 r_w^0}{\lambda^0 T^0} = 2 \div 4$).

19.3. Течение в трубе с пористыми стенками при наличии вдува. Сопоставление результатов расчетов данного течения, полученных на основе системы уравнений (2.122) — (2.130) и в рамках

приближения узкого канала, позволяет исследовать зависимость погрешностей, обусловленных использованием последнего, от величины безразмерного параметра вдува $m_f = Re_r \frac{\rho_w v_w'}{\rho^0 u^0}$. Кроме того,

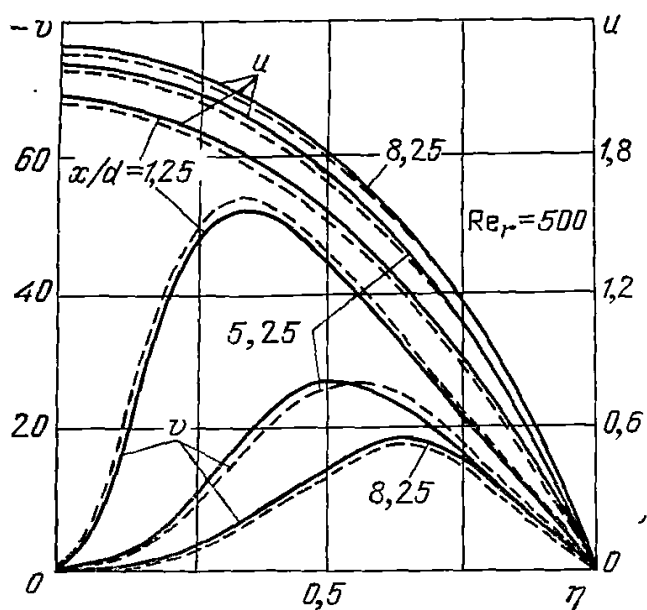


Рис. 4.5. Развитие профилей продольной и поперечной составляющих вектора скорости вниз по потоку. Условия течения и обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

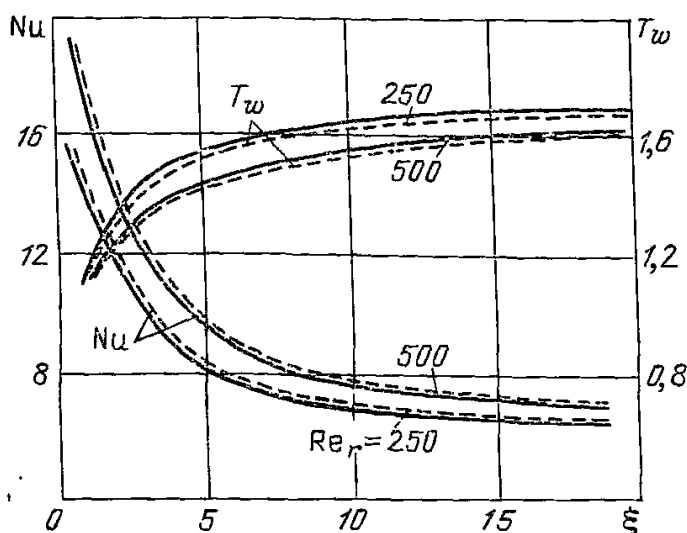


Рис. 4.6. Продольные распределения числа Нуссельта и температуры стенки при $q_w = 2$, $M = 10^{-2}$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

на примере этого течения можно оценить масштабы ошибок, связанных с использованием приближения узкого канала для описания течений в трубах на участках с резким изменением граничных условий на стенках. Возникновение таких ошибок связано с тем, что при наличии изменений граничных условий по длине трубы роль локального продольного масштаба (см. п. 6.3.2), очевидно, играет длина отрезка, на котором происходят указанные изменения. Поэтому использование приближения узкого канала для описания течения на участках, расположенных непосредственно вверх и вниз по потоку от места резкого (в пределе — скачкообразного) изменения граничных условий на стенках, является, вообще говоря, неоправданным в силу нарушения условия (2.144).

Рассмотрим медленное ($M^2 \ll 1$) движение однородного вязкого газа в круглой трубе, пронизаемый участок которой находится достаточно далеко от входа, так что течение перед этим участком можно считать установившимся. Тогда при отсутствии вдува ($m_f = 0$) непосредственно на пористом участке трубы реализуется течение Пуазейля [13], которое точно описывается обеими используемыми моделями (приближением узкого канала и системой уравнений (2.122) — (2.130)). Поэтому сопоставление решений, полученных в рамках этих моделей при наличии вдува, позволяет однозначно судить о границах применимости приближения узкого канала по параметру вдува m_f , чем и объясняется выбор данного течения для проведения численных экспериментов по исследованию этих границ.

В случае использования системы уравнений (2.122) — (2.130) было рассмотрено два варианта задания положений входной и выходной границ расчетной области по отношению к пористому участку трубы.

В первом случае (см. рис. 4.7, а) левая (входная) граница располагалась непосредственно в начале, а правая (выходная) — в конце пористого участка, имеющего длину 5 калибров. При этом на входе задавался параболический профиль скорости и однородный профиль температуры, соответствующие течению Пуазейля.

Во втором случае (см. рис. 4.7, б) входная граница расчетной области располагалась на расстоянии $1,75r_w^0$ от начала пористого участка трубы, длина которого полагалась равной $1,25r_w^0$, а выходная граница по-прежнему находилась на расстоянии $5r_w^0$ от входной, т. е. на расстоянии $2r_w^0$ вниз по потоку от конца пористого участка трубы.

На выходной границе расчетной области в обоих случаях ставились мягкие условия вида $\partial f / \partial \xi = 0$.

Очевидно, что в рамках приближения узкого канала имеет смысл только первый способ задания положения входной границы, поскольку сдвиг ее вверх по потоку от начала пористого участка не может сказаться на результатах расчетов в силу параболического характера данного приближения. По той же причине в рамках приближения узкого канала не требуется задание граничных условий на выходе из расчетной области. Таким образом, сопоставление результатов расчетов, полученных при решении систем урав-

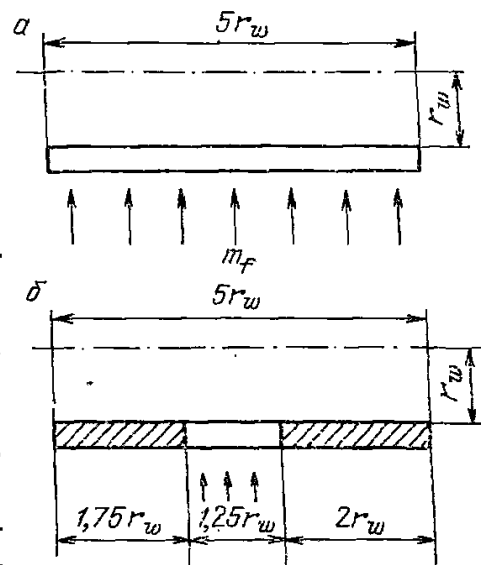


Рис. 4.7. Конфигурация расчетной области для задачи о расчете течения в трубе с пористым участком

нений (2.122) — (2.130) и узкого канала в рамках первой постановки задачи, т. е. при одинаковых параметрах потока на входе в пористый участок, позволяет судить о величине погрешностей, связанных с использованием приближения узкого канала внутри пористого участка трубы при наличии вдува. Погрешность же, обусловленная использованием приближения узкого канала в окрестности резкого изменения граничных условий на стенках трубы, т. е. в областях, расположенных непосредственно вверх и вниз по потоку от пористого участка, на границах которого скачком изменяется интенсивность вдува, может быть оценена на основании анализа результатов расчетов, полученных в рамках второй постановки задачи.

В качестве граничных условий на стенках трубы во всех случаях используются общие условия (4.17), которые для рассматриваемого течения однородного газа принимают вид

$$u = 0, \quad v = \frac{m_f}{\rho}, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} = m_f c_{p \text{ cool}} (T_w - T_{\text{cool}}) \quad \text{при } \eta = 1. \quad (4.44)$$

Здесь T_{cool} — температура вдуваемого газа на входе в пористую стенку, а $c_{p \text{ cool}}$ — его удельная теплоемкость при постоянном давлении. При $T_{\text{cool}} = T_w$ последнее из условий (4.44) вырождается в условие отсутствия теплообмена между газом и стенкой $\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)_w = 0$, при выполнении которого в рассматриваемом случае медленного ($M^2 \ll 1$) течения поток в трубе является изотермическим. Интенсивность вдува m_f , входящая в (4.44), задается постоянной на проливаемом участке трубы и равной нулю вне этого участка.

Как показали расчеты (они проводились для течения воздуха при $Re_r = 100$ и $m_f = 0 \div (-30)$), погрешность расчета локальных параметров потока, обусловленная использованием приближения узкого канала внутри расчетной области, т. е. при первом способе расположения ее входной и выходной границ (рис. 4.7, а), оказывается незначительной в широком диапазоне изменения m_f как для изотермического (рис. 4.8, 4.9), так и для неизотермического (рис. 4.10) режимов течения, причем при $m_f \leq 0,1 Re_r$ ее величина не превышает 10 %.

Об ошибках, возникающих вследствие использования приближения узкого канала в окрестности начала и конца пористого участка трубы, можно судить по рис. 4.11. Как и следовало ожидать, использование этой модели на отрезке трубы, непосредственно предшествующем пористому участку, приводит к качественному искажению картины течения в этой области. В силу параболического характера уравнений узкого канала, с их помощью невозможно описать эффекты распространения возмущений вверх по течению, под воздействием которых при наличии вдува происходит оттеснение потока перед входом в пористый участок от стенок и, как следствие этого, — уменьшение трения (сплошные кривые на

рис. 4.11). Погрешность расчета, обусловленная использованием приближения узкого канала в окрестности конца пористого участка, оказывается менее существенной и быстро уменьшается по мере удаления от него вниз по потоку.

В целом проведенные исследования позволяют заключить, что приближение узкого канала является весьма эффективной моделью

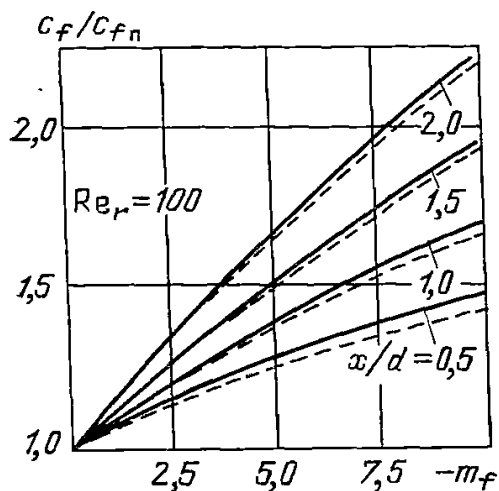


Рис. 4.8. Зависимость коэффициента трения в различных сечениях трубы от интенсивности вдува при изотермическом течении; c_{fp} — коэффициент трения для течения Пуазейля. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

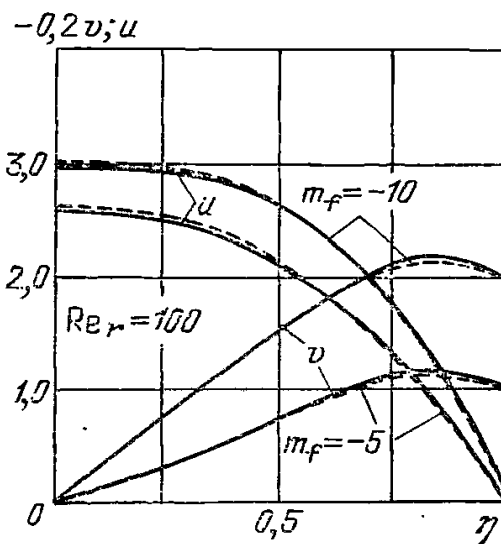


Рис. 4.9. Профили продольной и поперечной составляющих вектора скорости в сечении $x/d = 2$ трубы при изотермическом течении. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

дозвуковых течений вязкого газа в круглых трубах постоянного сечения с пористыми стенками при наличии вдува. Необходимость привлечения для расчета таких течений более полных моделей типа систем уравнений (2.122) — (2.130) может возникнуть лишь при сравнительно высоких интенсивностях вдува ($m_f \geq 0,1 Re_r$), а также в окрестности сечений, в которых имеет место резкое изменение граничных условий на стенках.

Рассмотренные в данном и предыдущем разделах примеры течений вязких газов и газовых смесей в каналах относятся к наиболее простому типу, характеризующемуся наличием доминирующего направления движения. Остановимся далее на двух примерах более сложных течений, отличительной особенностью которых является наличие в потоке локальных зон рециркуляции.

19.4. Течение в канале с внезапным расширением и в канале постоянного сечения при наличии отсоса через пористые стенки. Попытки применения приближения узкого канала для расчета таких течений, сделанные в последние годы в ряде работ [454—458], кажутся на первый взгляд неоправданными: очевидно, что допущение о наличии существенных различий между продольными и

поперечными масштабами длины и скорости, лежащее в основе приближения узкого канала, не выполняется в зонах рециркуляции. Тем не менее проведенные в [454—458] численные эксперименты показали, что по крайней мере в некоторых случаях в рамках приближения узкого канала удается достаточно точно рассчитать параметры потока в областях возвратного течения. В связи с

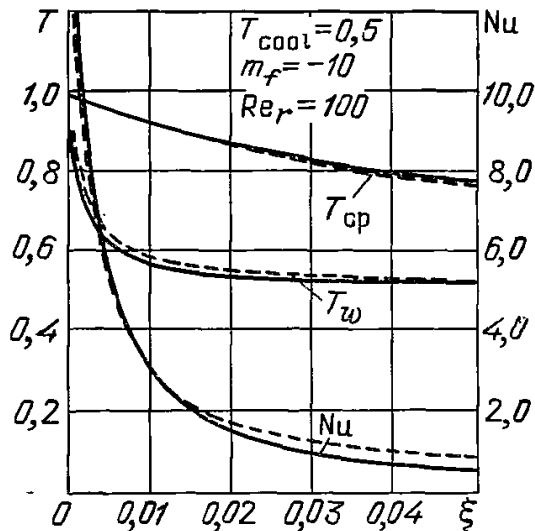


Рис. 4.10. Продольные распределения среднерасходной температуры газа, температуры стенки и числа Нуссельта при вдуве холодного газа. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

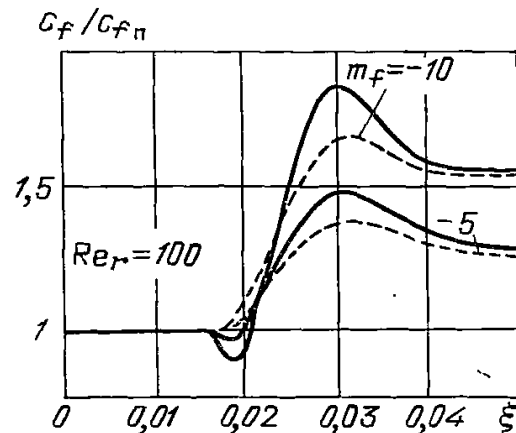


Рис. 4.11. Продольное распределение коэффициента трения при изотермическом вдуве через пористый участок трубы; $c_{fП}$ — коэффициент трения для течения Пуазейля. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

этим, естественно, возникает необходимость в более систематической оценке возможности использования данного приближения при расчете течений с зонами рециркуляции. Второй, не менее важный вопрос связан с выбором алгоритмов численного интегрирования уравнений узкого канала при расчете течений такого типа. Как уже отмечалось в п. 6.3.4, вычислительные преимущества этой модели, так же как и других параболизированных моделей течений вязких газов и газовых смесей, полностью проявляются лишь в случае использования маршевых конечно-разностных схем. Однако опыт численного моделирования внешних и внутренних отрывных течений на основе параболических моделей (см., например, [459—461]) свидетельствует о том, что маршевые схемы, как правило, теряют устойчивость в областях развитого возвратного течения. В связи с этим для расчета течений в каналах с резким расширением на основе приближения узкого канала используются либо спектральные методы [458], либо конечно-разностные методы, основанные на применении глобальных итерационных процедур (например, метода установления [455, 456]), что значительно снижает вычислительные преимущества приближения узкого канала по

сравнению с «эллиптическими» моделями. С другой стороны, имеются и более или менее удачные попытки использования маршевых конечно-разностных схем для решения уравнений узкого канала при наличии зон рециркуляции. В частности, в работе Иггса и Смита [457] для расчета в рамках приближения узкого канала изотермического течения несжимаемой жидкости в медленно расширяющемся плоском канале использовалась двухслойная маршевая конечно-разностная схема. При этом не наблюдалось никаких вычислительных трудностей, что, по мнению авторов [457], связано с относительно малой протяженностью зон рециркуляции в рассмотренном ими течении. Кроме того, в работе Квана, Плетчера и Льюиса [459] в рамках приближения узкого канала с помощью маршевой конечно-разностной схемы получено решение задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением при наличии обширных зон рециркуляции. Для обеспечения устойчивости схемы в этих зонах использовалась так называемая процедура FLARE [462], состоящая в отбрасывании конвективных членов в уравнении переноса импульса в областях потока с отрицательными значениями продольной составляющей скорости, а также совместное (с помощью векторной прогонки) решение системы разностных уравнений.

В работе [463] предложен другой, более экономичный и лучше поддающийся внутреннему контролю способ преодоления неустойчивости маршевых конечно-разностных схем численного интегрирования уравнений узкого канала при расчете течений с зонами рециркуляции. На основе анализа устойчивости простейшей двухслойной маршевой неявной конечно-разностной схемы для модельного линейного уравнения переноса

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

в [463] показано, что при отрицательных значениях продольной составляющей вектора скорости u , т. е. в областях возвратного течения, для обеспечения устойчивости схемы требуется выполнение условия

$$h_x > (h_x)_{\min} = \frac{1}{2} |u| \frac{h_y^2}{\nu}, \quad (4.45)$$

где h_x и h_y — продольный и поперечный шаги конечно-разностной сетки. Таким образом, на шаг интегрирования по продольной координате накладывается ограничение снизу, которое может, вообще говоря, вступить в противоречие с требованием точности аппроксимации исходных дифференциальных уравнений их разностными аналогами.

На рис. 4.12, 4.13 представлены результаты численных экспериментов, выполненных в рамках приближения узкого канала с помощью конечно-разностной схемы, описанной в п. 18.2, для слу-

чая ламинарного неизотермического ($T_w = 4$) дозвукового ($M^2 = 10^{-2}$) течения воздуха в круглой трубе с внезапным расширением (в сечении $\xi = 0$ радиус трубы увеличивается вдвое) при различных значениях шага интегрирования по продольной координате $\Delta\xi$. Эти эксперименты полностью подтверждают выводы приближенного анализа о наличии ограничений снизу на величину $\Delta\xi$

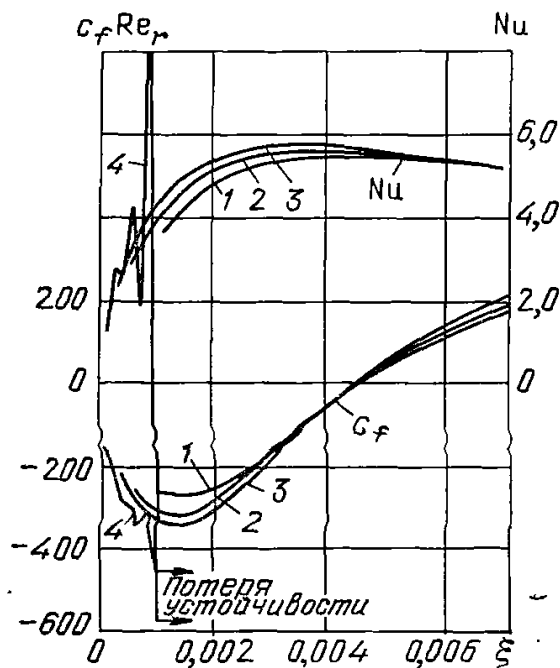


Рис. 4.12. Влияние шага конечно-разностной сетки по продольной координате на распределения коэффициента трения и числа Нуссельта при неизотермическом течении в трубе с внезапным расширением: 1 — $\Delta\xi = 1,12 \cdot 10^{-3}$; 2 — $5,6 \cdot 10^{-4}$; 3 — $2,8 \cdot 10^{-4}$; 4 — $1,4 \cdot 10^{-4}$

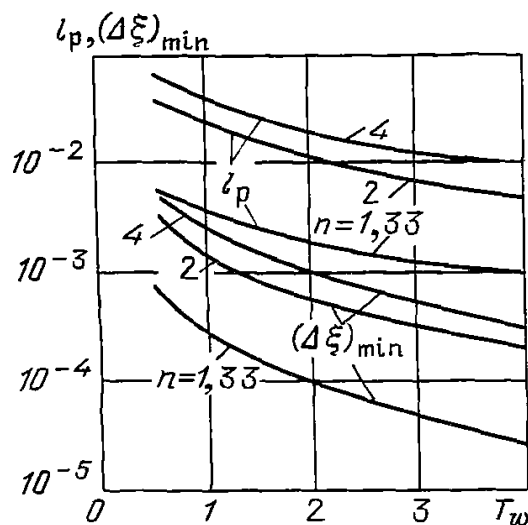


Рис. 4.13. Зависимость безразмерной длины зоны рециркуляции и минимально возможного шага интегрирования по маршевой переменной от температурного фактора и степени расширения трубы

при расчете течений с зонами рециркуляции с помощью маршевых конечно-разностных схем (см. рис. 4.12). Кроме того, они свидетельствуют о том, что значение шага $(\Delta\xi)_{\min}$, при котором используемая схема сохраняет устойчивость, существенно зависит от определяющих параметров рассматриваемого течения. В частности, из рис. 4.13 видно, что $(\Delta\xi)_{\min}$ возрастает при уменьшении T_w и при увеличении степени расширения трубы $n = (r_w^0)_{\text{вых}} / (r_w^0)_{\text{вх}}$. На том же рисунке представлены зависимости безразмерной длины зоны рециркуляции $l_p = l'_p / (r_w^0 \text{Re}_r)$ от параметров T_w и n , рассчитанные на основе модели существенно дозвуковых течений (2.122) — (2.130). Эти зависимости имеют тот же характер, что и зависимости $(\Delta\xi)_{\min}$ от T_w и n . Благодаря этому обстоятельству при проведении расчетов рассматриваемого течения в рамках приближения узкого канала при $\Delta\xi = (\Delta\xi)_{\min}$ в зоне рециркуляции

оказывается достаточное для получения приемлемой точности число слоев по продольной координате, хотя наличие ограничения снизу на величину $\Delta\xi$ не позволяет, конечно, получить решение с любой наперед заданной степенью точности. В частности, для приведенного на рис. 4.12 режима течения отличие значений коэффициента трения и числа Нуссельта в зоне рециркуляции, рассчитанных при $(\Delta\xi)_{\min} = 2,8 \cdot 10^{-4}$, от соответствующих «точных» значений этих параметров, полученных путем линейной экстраполяции результатов расчетов, выполненных при $\Delta\xi = 5,6 \cdot 10^{-4}$ и $2,8 \cdot 10^{-4}$, на нулевое значение $\Delta\xi$, т. е. по формуле

$$f|_{\Delta\xi \rightarrow 0} = f|_{\frac{\Delta\xi}{2}} + \left(f|_{\frac{\Delta\xi}{2}} - f|_{\Delta\xi} \right),$$

не превышает 10 %.

Для более полной оценки возможности использования приближения узкого канала в сочетании с маршевой конечно-разностной схемой при $\Delta\xi = (\Delta\xi)_{\min}$ для численного моделирования течений в каналах при наличии зон рециркуляции было проведено сопоставление результатов, полученных с помощью такого подхода и на основе эллиптической модели (2.122)–(2.130) при решении задач о ламинарном неизотермическом течении воздуха в трубе с внезапным расширением и об изотермическом течении в трубе постоянного сечения с пористыми стенками при наличии отсоса.

В последнем случае возникновение возвратного течения в трубе обусловлено уменьшением расхода газа по длине трубы вследствие его отсоса через пористые стенки. Более того, очевидно, что при любом значении интенсивности отсоса m_f на некотором (зависящем от величины m_f) расстоянии от начала пористого участка поток в трубе должен полностью разворачиваться.

Сопоставление решений первой из указанных задач, полученных в рамках двух используемых моделей, подтверждает вывод о том, что приближение узкого канала (штриховые кривые на рис. 4.14) качественно верно описывает структуру течения в зоне рециркуляции. Однако погрешность расчета локальных параметров потока на основе этого приближения существенно зависит от определяющих параметров течения (температурного фактора, числа Рейнольдса, степени расширения трубы) и может оказаться значительной (особенно при расчете динамических характеристик потока, в частности, коэффициента трения на стенках трубы — см. рис. 4.15). Анализ результатов расчетов показал, что указанная зависимость определяется главным образом влиянием перечисленных параметров на длину зоны рециркуляции, которая может рассматриваться как характерный локальный продольный масштаб рециркуляционного течения, и, следовательно, определяет величину погрешностей, обусловленных использованием для его описания приближения узкого канала. Данное обстоятельство наглядно иллюстрирует рис. 4.16, на котором приведена универсальная по отношению к параметрам

T_w и n зависимость погрешности расчета безразмерной длины зоны рециркуляции l_p в рамках приближения узкого канала от значений этой величины, рассчитанных на основе модели (2.122) — (2.130). Кроме того, из рисунка видно, что с увеличением l_p погрешность

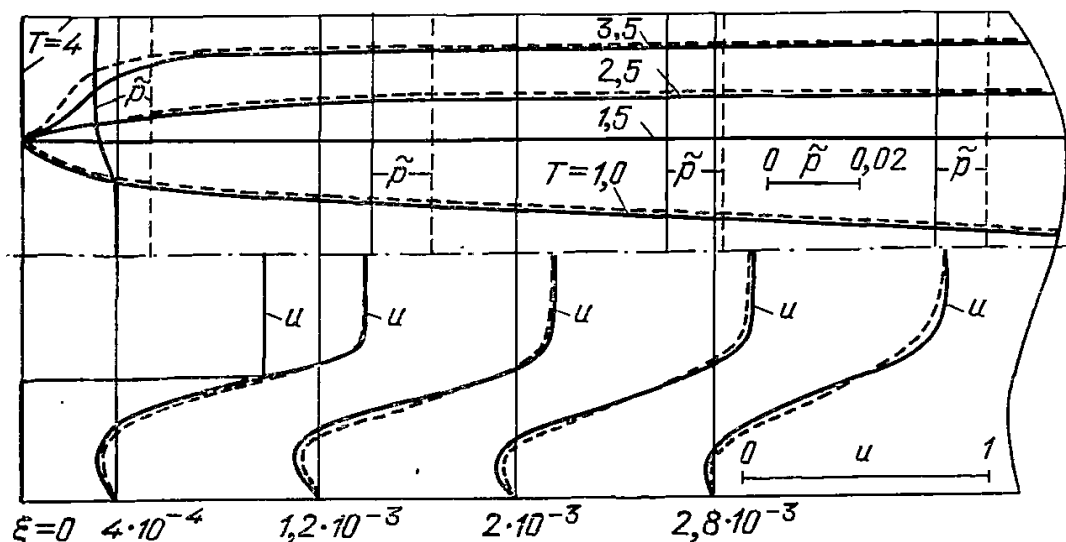


Рис. 4.14. Изолинии температуры, профили динамического давления и продольной составляющей вектора скорости в трубе с внезапным расширением при $Re_\tau = 1000$, $T_w = 4$, $n = 2$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

ее определения уменьшается, что находится в полном соответствии с общими предпосылками, лежащими в основе приближения узкого канала, и при $l_p > 10^{-2}$ не превышает 15 %. Весьма существенным с точки зрения оценки возможностей применения приближения узкого канала для описания рассматриваемого класса течений является также то обстоятельство, что связанные с его использованием ошибки уменьшаются вниз по потоку от конца зоны рециркуляции (см. рис. 4.15).

Приведенные результаты численных исследований дозвуковых течений вязкого газа в трубе с внезапным расширением на основе приближения узкого канала позволяют заключить, что несмотря на определенные недостатки такого подхода, связанные, в частности, с наличием ограничений снизу на шаг интегрирования уравнений узкого канала по маршевой переменной, он позволяет во многих случаях не только с приемлемой для приложений точностью рассчитать параметры течения и теплообмена вне зоны рециркуляции (вниз по потоку от нее), но и описать собственно рециркуляционное течение. При этом затраты машинного времени и памяти ЭВМ сокращаются более чем на порядок по сравнению со случаем использования эллиптической модели (2.122) — (2.130).

Аналогичные выводы можно сделать и относительно возможности и эффективности использования приближения узкого канала для расчета рециркуляционного течения, возникающего в трубе постоянного сечения с пористыми стенками при наличии отсоса. Соот-

ветствующие результаты расчетов представлены на рис. 4.17—4.20. Так же как и расчеты течения в трубе при наличии вдува, они проводились для двух вариантов расположения входной и выходной границ расчетной области по отношению к пористому участку трубы (см. рис. 4.7).

Комментируя эти результаты, следует прежде всего отметить, что расчет рассматриваемого течения в рамках приближения узкого канала с помощью маршевой схемы возможен лишь на участке трубы, где хотя бы частично сохраняется поступательное движение газа (в области полного разворота течения, т. е. вниз по потоку от нулевой линии тока, любой маршевый алгоритм расчета, естественно, становится абсолютно неустойчивым (рис. 4.17)). При этом погрешность расчета локальных характеристик течения резко увеличивается в конце указанного участка, что хорошо видно из рис. 4.17, 4.18. В то же время на отрезке трубы, на котором зона возвратного течения ограничена (занимает не более половины сечения), погрешность расчета, обусловленная использованием приближения узкого канала для случая $m_f = \text{const}(\xi)$, оказывается незначительной в широком диапазоне изменения m_f .

Из анализа результатов расчетов для случая, когда параметр m_f претерпевает внутри расчетной области скачкообразное изменение, можно сделать вывод о том, что несмотря на возникновение в окрестности пористого участка трубы зоны рециркуляции

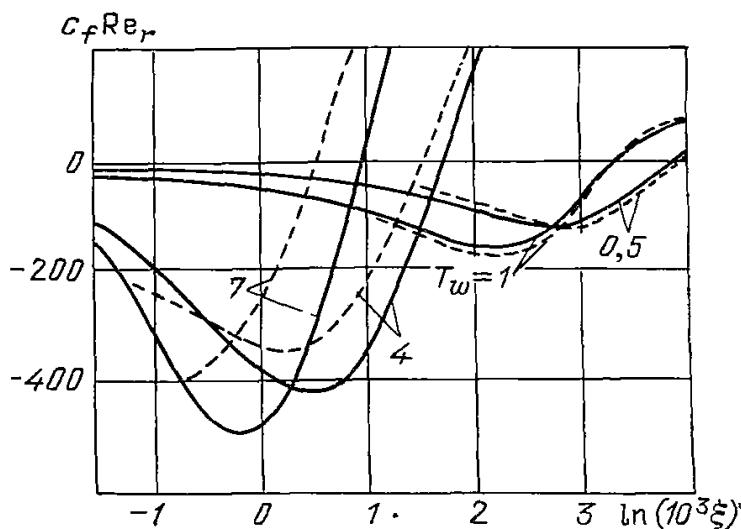


Рис. 4.15. Продольные распределения коэффициента трения в трубе с внезапным расширением при $Re_r = 1000$, $n = 2$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

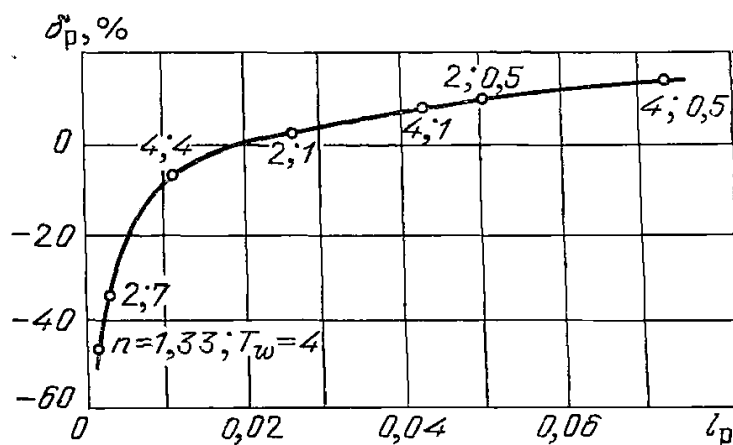


Рис. 4.16. Зависимость погрешности расчета безразмерной длины зоны рециркуляции в рамках приближения узкого канала ($\delta_p = (l_p^{ук} - l_p)/l_p$) от величины l_p

Из анализа результатов расчетов для случая, когда параметр m_f претерпевает внутри расчетной области скачкообразное изменение, можно сделать вывод о том, что несмотря на возникновение в окрестности пористого участка трубы зоны рециркуляции

(рис. 4.19, 4.20) характер влияния резкого изменения m_f на погрешность расчета в рамках приближения узкого канала основных параметров потока при наличии отсоса в целом аналогичен рассмотренному выше характеру влияния на эту погрешность скачка m_f в случае вдува. В частности, при использовании маршевых схем численного интегрирования уравнений узкого канала принципиально не могут быть описаны эффекты, связанные с влиянием отсоса

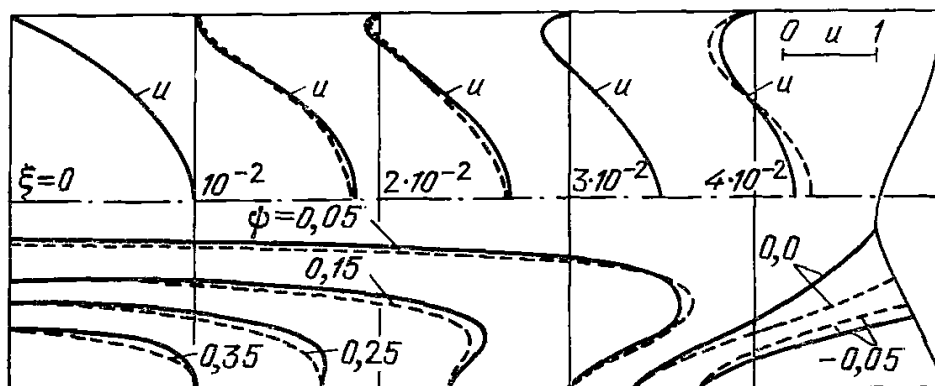


Рис. 4.17. Профили продольной составляющей вектора скорости и изолинии функции тока в трубе с отсосом при $Re_r = 100$, $m_f = 15$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

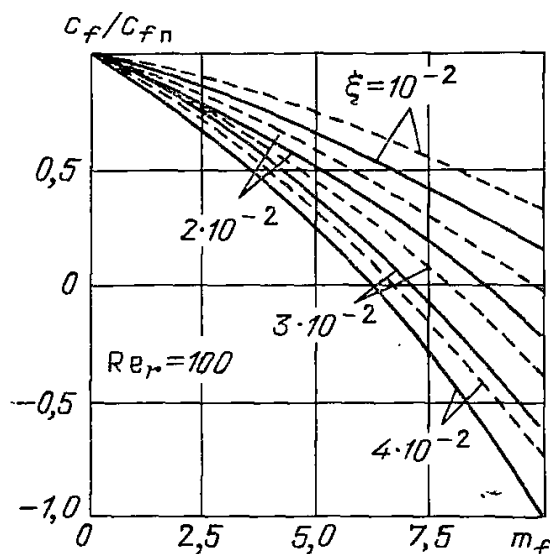


Рис. 4.18. Зависимость коэффициента трения в различных сечениях трубы от интенсивности отсоса; c_{fp} — коэффициент трения для течения Пуазейля. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

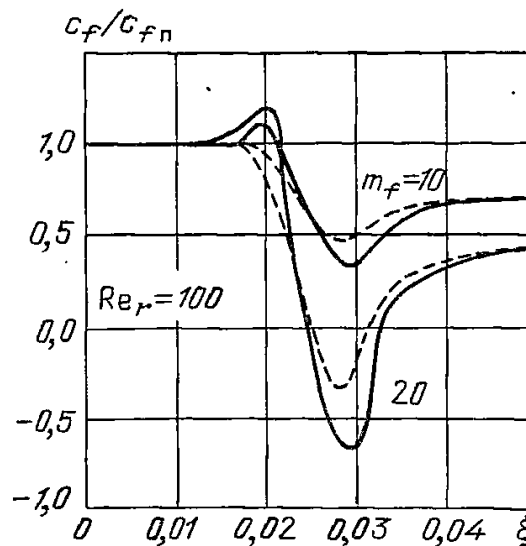


Рис. 4.19. Продольные распределения коэффициента трения в трубе при наличии отсоса через пористый участок; c_{fp} — коэффициент трения для течения Пуазейля. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

на параметры потока в области, непосредственно предшествующей пористому участку трубы, что приводит, например, к занижению трения на стенке в этой области (рис. 4.19). В области же вниз по потоку от пористого участка ошибки, обусловленные использова-

нием приближения узкого канала при наличии отсоса, как и в случае вдува, быстро затухают.

Рассмотренные результаты численных методических исследований по оценке границ применимости приближения узкого канала свидетельствуют о том, что возможности практического использования этой модели оказываются существенно более широкими, чем

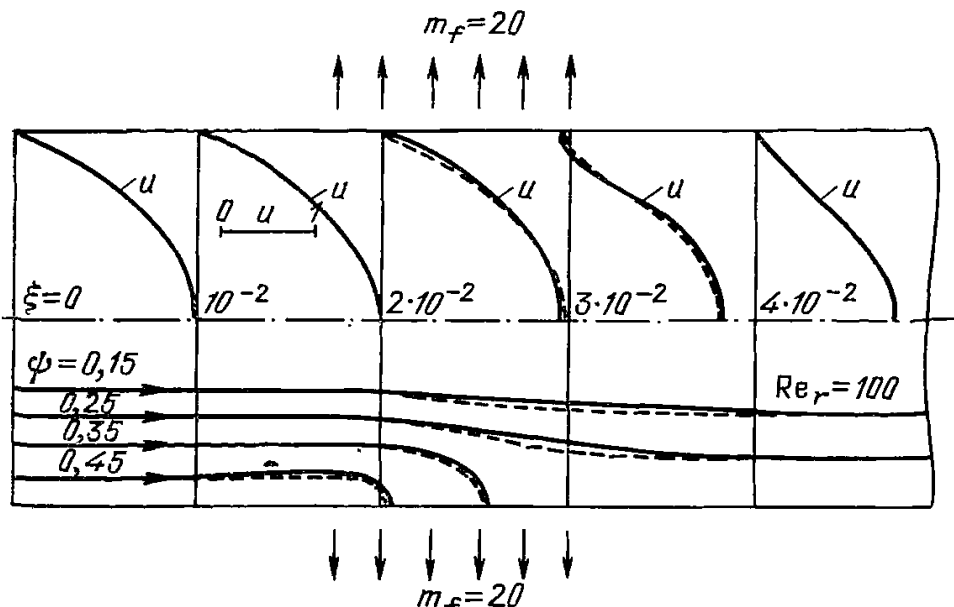


Рис. 4.20. Профили продольной составляющей вектора скорости и изолинии функции тока в трубе с отсосом через пористый участок. Обозначения линий — те же, что и на рис. 4.3

можно было бы ожидать на основе анализа лежащих в ее основе допущений. Такая ситуация вообще является довольно типичной для многих приближенных моделей различных физических процессов. Тем не менее к использованию приближенных моделей при условиях, выходящих за рамки строго обоснованных границ их применимости, очевидно, следует подходить с известной осторожностью, а окончательное суждение об адекватности модели и физического явления может быть сформулировано лишь в результате сопоставления результатов расчетов в рамках этой модели с соответствующими данными физического эксперимента.

19.5. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными. На рис. 4.21, а представлена экспериментальная зависимость длины зоны рециркуляции от числа Рейнольдса, полученная в работе [464] для ламинарного изотермического течения воздуха в круглой трубе с внезапным расширением ($n=2$), а на рис. 4.21, б — измеренные в опытах [465] профили скорости в плоском канале с внезапным расширением ($n=3$). Там же сплошными кривыми изображены соответствующие результаты расчетов, полученные на основе приближения узкого канала. В обоих случаях согласование расчетных и экспериментальных данных является вполне удовлетворительным. Это свидетельствует о правильности

выводов относительно возможности использования приближения узкого канала для анализа данного класса течений, сделанных в предыдущем разделе на основе численных методических исследований.

На рис. 4.22 представлены результаты расчетов и экспериментальные данные [466—468], относящиеся к турбулентному режиму

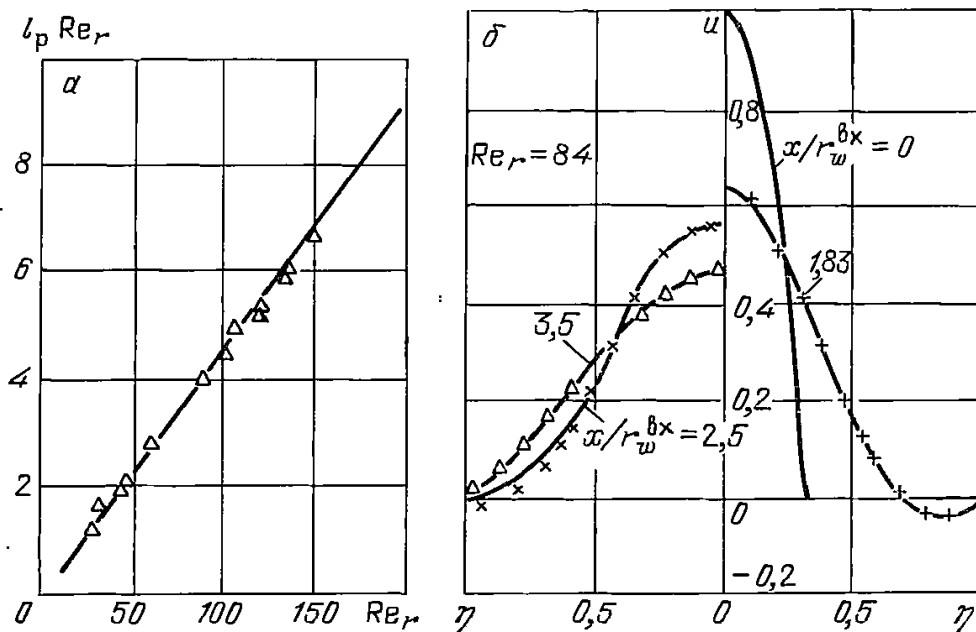
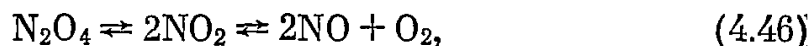


Рис. 4.21. Сравнение результатов расчетов в рамках приближения узкого канала с экспериментальными данными [464] по изотермическому течению воздуха в круглой трубе с внезапным расширением (а) и в плоском канале с внезапным расширением [465] (б)

течения диссоциирующей четырехокси азота N_2O_4 в круглой обогреваемой трубе постоянного сечения.

В экспериментах [466, 467] тепловой поток в стенку поддерживался приблизительно постоянным, а в работе [468] изменялся по длине трубы по синусоидальному закону. В [467] обогрев начинался непосредственно от входа трубы, т. е. исследовался участок гидродинамической и тепловой стабилизации потока, а в [466, 468] имел место лишь на участке развитого турбулентного течения (течение на тепловом начальном участке). Таким образом, выбранные для сопоставления с расчетом эксперименты охватывают весьма широкий диапазон изменения условий течения.

При проведении расчетов предполагалось, что диссоциация N_2O_4 протекает по схеме



а гетерогенная каталитическая диссоциация на стенках трубы отсутствует [469]. Для определения констант скоростей реакций (4.46) использовались данные [470].

В соответствии с рекомендациями Б. С. Петухова и В. К. Шикова [471] для определения турбулентной вязкости применялась модель турбулентности Прандтля с использованием формулы Ван-Дрифта при вычислении пути смешения (3.150). Турбулентные аналоги чисел Прандтля и Шмидта полагались равными единице.

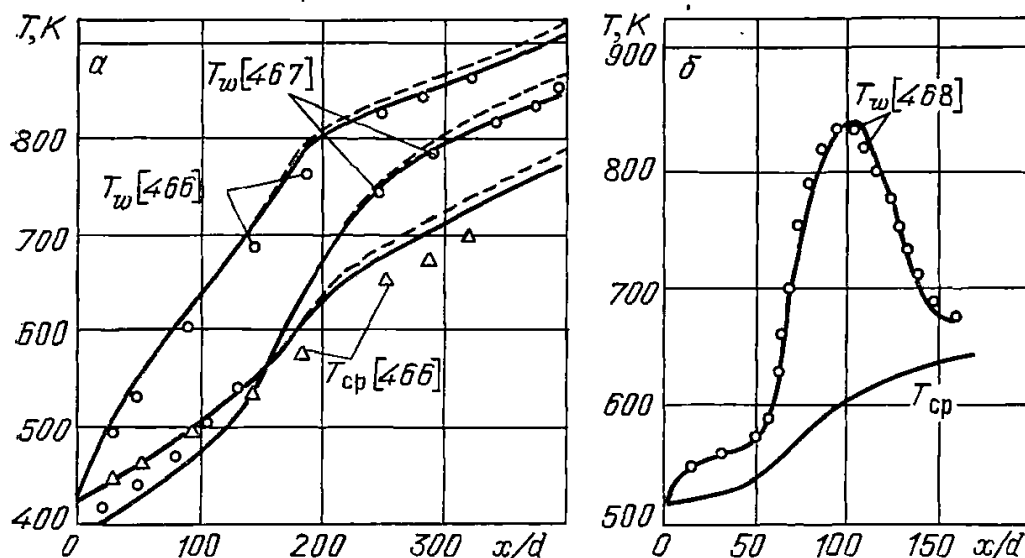
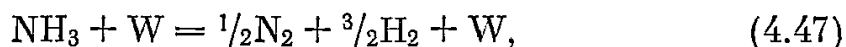


Рис. 4.22. Сравнение результатов расчетов в рамках приближения узкого канала с экспериментальными данными [466—468] по турбулентному течению диссоциирующей четырехокси азота N_2O_4 в обогреваемых трубах; штриховая линия — расчет в предположении о равновесном протекании первой стадии диссоциации $N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2$

Сопоставление расчетных данных с результатами экспериментов свидетельствует о правомерности использования приближения узкого канала для описания турбулентного течения неравновесно диссоциирующей четырехокси азота по трубам в представляющем интерес для практики диапазоне изменения определяющих параметров.

Аналогичный вывод можно сделать и относительно течения аммиака в круглых обогреваемых трубах постоянного сечения, изготовленных из стали X18H10T, в условиях развитой каталитической диссоциации на стенках. Соответствующие данные представлены на рис. 4.23 для ламинарных режимов течения, экспериментально исследовавшихся в [449], и на рис. 4.24 — для турбулентных режимов, изучавшихся в [472]. При проведении расчетов в соответствии с данными [473] предполагалось, что гетерогенная каталитическая диссоциация аммиака протекает по схеме



а для определения скорости протекания реакции (4.47) использовалась зависимость, предложенная В. А. Кургановым и А. И. Гладуновым [473]. При расчете турбулентных режимов течения турбулентная вязкость определялась по формуле Прандтля — Ван-Дрифта (3.150).

Из рисунков видно, что согласование расчетных и экспериментальных данных как по тепло-, так и по массообмену является вполне удовлетворительным во всем рассмотренном диапазоне изменения условий течения.

Следующий пример успешного применения приближения узкого канала для численного моделирования течений многокомпонент-

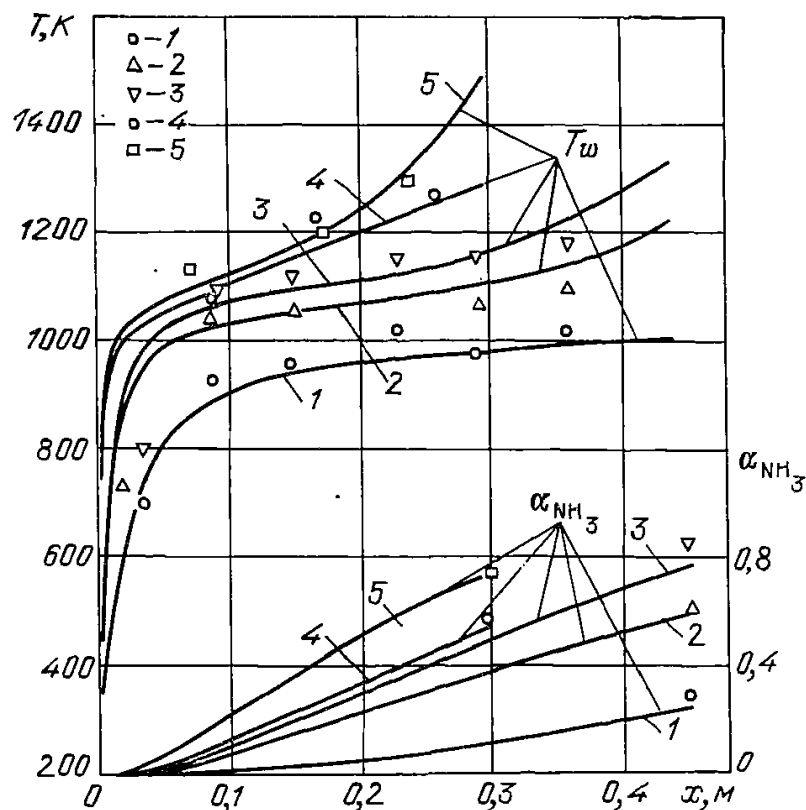
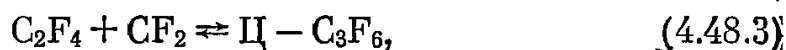


Рис. 4.23. Сравнение результатов расчетов в рамках приближения узкого канала с экспериментальными данными по температуре стенки (T_w) и среднерасходной степени диссоциации аммиака (α_{NH_3}) в трубе из стали X18H10T при ламинарном режиме течения; 1–5 — номера экспериментов из [449]

ных химически неравновесных газовых смесей в обогреваемых трубах относится к области химической технологии. Речь идет о моделировании процесса получения тетрафторэтилена (C_2F_4) путем пиролиза дифторхлорметана (CF_2HCl) в проточном реакторе, представляющем собой круглую трубу с обогреваемыми стенками. На вход реактора подается дифторхлорметан, пиролиз которого, согласно данным работ [474–477], протекает по схеме, включающей пять основных процессов





константы скоростей которых также приведены в [474—477].

В представляющем интерес для практики диапазоне изменения определяющих параметров режим течения в реакторе является турбулентным ($\text{Re}_r > 10^5$). Для определения турбулентной вязкости, как и во всех предыдущих случаях, при проведении расчетов использовалась модель Прандтля — Ван-Дрифта (3.150).

В качестве граничных условий к уравнениям узкого канала на входе в трубу при проведении расчетов задавались однородные профили всех параметров потока, причем концентрация исходного продукта (CF_2HCl) полагалась равной единице, поскольку он подается в реактор при комнатной температуре, т. е. при условиях, когда реакции (4.48) заморожены. На стенках реактора ставились условия прилипания и непроницаемости (4.17.1) для скорости, условия второго рода (4.17.2) для температуры (задавался измеренный в опытах [478] тепловой поток в стенку) и условия равенства нулю диффузионных потоков J_{η} (условия (4.17.3)) для случая $m_f = 0$ и отсутствия каталитических реакций на стенках реактора) для концентраций отдельных компонент. На оси симметрии реактора ставились условия симметрии (4.16).

Расчеты, выполненные в рамках описанной постановки задачи, показали, что приближение узкого канала позволяет с достаточной степенью точности определить все основные характеристики процесса пиролиза. Об этом свидетельствует сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными [478] по распределению температуры реакционной смеси вдоль оси реактора (рис. 4.25), а также по среднерасходным концентрациям основных продуктов пиролиза дифторхлорметана на выходе из реактора (табл. 4.5).

Приведенные выше примеры относятся к течениям химически реагирующих газовых смесей в круглых обогреваемых трубах постоянного сечения.

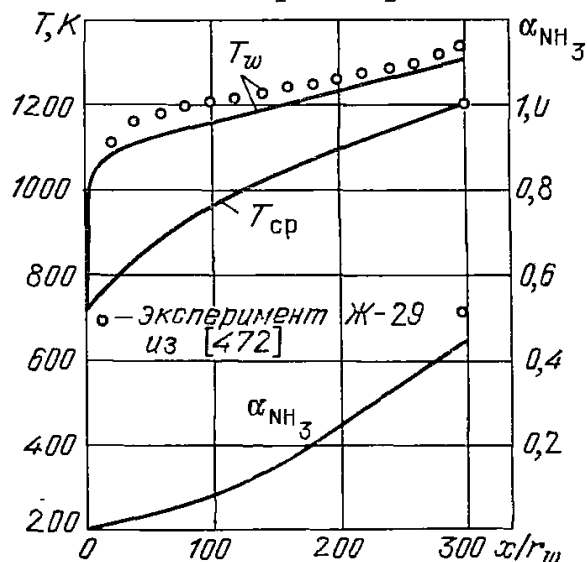


Рис. 4.24. Сравнение результатов расчетов в рамках приближения узкого канала с экспериментальными данными по температуре стенки (T_w) и среднерасходной степени диссоциации аммиака (α_{NH_3}) в трубе из стали X18H10T при турбулентном режиме течения

На рис. 4.26 представлены результаты расчетов ламинарного течения высокотемпературного воздуха в плоском сужающемся (клиновидном) канале с интенсивно охлаждаемыми стенками. Там

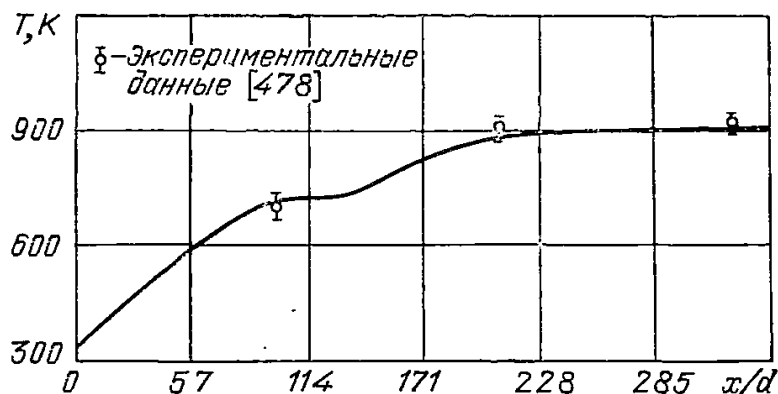


Рис. 4.25. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по распределению температуры реакционной смеси вдоль оси трубчатого реактора пиролиза тетрафторэтилена

же приведены соответствующие экспериментальные данные по зависимости тепловых потерь, обусловленных охлаждением стенок, от начальной энтальпии потока [479].

При проведении расчетов высокотемпературный воздух рассматривался как смесь, состоящая из девяти компонент (O_2 , O , N_2 , N , NO , NO_2 , N_2O , O_3 , Ar), взаимодействие которых описывается ки-

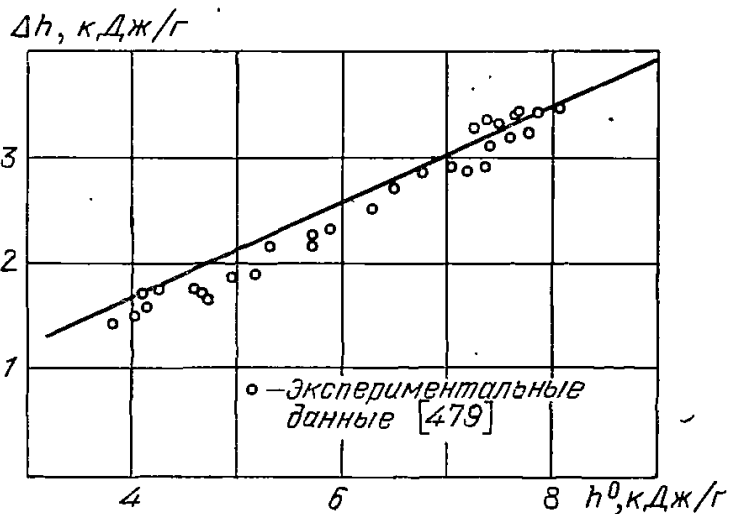


Рис. 4.26. Сравнение расчетных и экспериментальных данных по тепловым потерям при течении диссоциированного воздуха в щелевом закалочном устройстве

нетической моделью [480], включающей 19 элементарных химических реакций (см. табл. 4.6). Их константы скоростей заимствовались из работ [481, 482]. На входе в канал задавались однородные профили скорости и температуры, а состав смеси предполагался равновесным. В качестве граничных условий на стенках трубы для

уравнения энергии задавалась температура стенки, определенная в экспериментах [479]. Кроме того, предполагалось, что стенки канала являются абсолютно каталитическими по отношению к реакциям рекомбинации атомов.

Как видно из рис. 4.26, использование приближения узкого канала и в данном случае обеспечивает вполне удовлетворительное

Таблица 4.5

Компонента	C_2F_4	C_3F_8	$Ц-C_4F_8$
$\frac{c_{\text{расч}} - c_{\text{эксп}}}{c_{\text{эксп}}} \cdot 100 \%$	0,3 %	5,2 %	3,8 %

соответствие результатов расчета и экспериментальных данных по теплообмену. Кроме того, в рамках этого приближения удастся с достаточной степенью точности определить такую «тонкую» характеристику рассматриваемого процесса, как интенсивность химилюминисценции потока на выходе из канала. Эта величина определяется скоростью протекания реакции излучательной рекомбинации окиси азота и атомарного кислорода, которая, в свою очередь, является сильно нелинейной функцией состава и температуры смеси.

Подводя итоги численных экспериментов по оценке границ применимости приближения узкого канала при расчете течений газовых смесей в плоских и осесимметричных каналах, можно сделать вывод о том, что в широком диапазоне изменения определяющих параметров эта модель сочетает в себе возможность адекватного описания течений данного класса с высокой экономичностью и является эффективным инструментом для исследования как ламинарных, так и турбулентных режимов течения самых разнообразных газовых смесей в охлаждаемых и обогреваемых каналах с непроницаемыми

Таблица 4.6

№	Реакция	№	Реакция
1	$O + O + M \rightleftharpoons O_2 + M$	11	$N + NO_2 \rightleftharpoons NO + NO$
2	$N + N + M \rightleftharpoons N_2 + M$	12	$N + O_3 \rightleftharpoons NO + O_2$
3	$N + O + M \rightleftharpoons NO + M$	13	$O + N_2O \rightleftharpoons NO + NO$
4	$N + O_2 \rightleftharpoons NO + O$	14	$O + NO_2 \rightleftharpoons O_2 + NO$
5	$N + NO \rightleftharpoons N_2 + O$	15	$O + O_3 \rightleftharpoons O_2 + O_2$
6	$NO + NO \rightleftharpoons N_2 + O_2$	16	$O + N_2O \rightleftharpoons O_2 + N_2$
7	$NO + O + M \rightleftharpoons NO_2 + M$	17	$NO + O_3 \rightleftharpoons NO_2 + O_2$
8	$O_2 + O + M \rightleftharpoons O_3 + M$	18	$NO + N_2O \rightleftharpoons NO_2 + N_2$
9	$N + N_2O \rightleftharpoons NO + N_2$	19	$N + NO_2 \rightleftharpoons N_2 + O_2$
10	$N + NO_2 \rightleftharpoons N_2O + O$	M — каталитическая частица	

и пористыми стенками при наличии вдува и отсоса. Некоторые результаты таких исследований, полученные с помощью метода, описанного в § 18, приведены в работах [447—451, 479, 483]. В частности, в [447, 448] рассмотрены ламинарные и турбулентные течения продуктов сгорания кислородо — водородных смесей в охлаждаемых трубах, интерес к которым обусловлен перспективами развития водородной энергетики. В работах [450, 483] проанализирована возможность применения различных упрощенных кинетических моделей и методов описания многокомпонентной диффузии при расчете течений в обогреваемых трубах диссоциирующей четырехоксида азота, являющейся перспективным теплоносителем для ядерных реакторов на быстрых нейтронах [484]. В [449, 451] проведено детальное исследование ламинарных и турбулентных режимов течения аммиака в обогреваемых трубах в условиях развитой каталитической диссоциации на стенках. При этом установлено, что на характеристики данного течения существенное влияние оказывает эффект диффузионного разделения химических элементов, обусловленный значительным различием диффузионных свойств аммиака и продуктов его диссоциации (азота и водорода). Кроме того, показано, что обнаруженные в опытах В. А. Курганова и А. И. Гладунцова [473, 485] кризисные явления, связанные с ламинаризацией турбулентного потока в трубе под действием интенсивных тепловых потоков, могут быть качественно правильно описаны в рамках $(k - \varepsilon)$ -модели турбулентности Лаундера — Джонса [377, 389]. Наконец, в работе [479] проведены широкие численные исследования течения высокотемпературного диссоциированного воздуха в интенсивно охлаждаемых плоских каналах и конфузорах. Интерес к такого рода течениям, проявляемый в последние годы, обусловлен разработкой так называемых закалочных устройств [486], предназначенных для получения газовых смесей, неравновесных по химическому составу и (или) по распределению энергии между внутренними степенями свободы частиц.

ТЕЧЕНИЯ В ПОЛОСТИ РЕЗОНАТОРОВ СВЕРХЗВУКОВЫХ
ХИМИЧЕСКИХ ЛАЗЕРОВ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ

§ 20. Введение

В настоящее время численные исследования процессов, протекающих в полости оптических резонаторов сверхзвуковых непрерывных химических лазеров (НХЛ), так же как и экспериментальные исследования этих процессов, имеют уже более чем десятилетнюю историю (первые публикации на эту тему появились в 1972—1973 гг.). За этот период накоплен достаточно большой опыт использования различных математических моделей, с той или иной степенью полноты описывающих сложную совокупность газодинамических и физико-химических процессов, характерных для течений в НХЛ. Этот опыт свидетельствует, в частности, о том, что надежное расчетное прогнозирование выходных энергетических характеристик лазеров данного типа и, тем более, полей газодинамических, термодинамических и оптических параметров потока в полости оптического резонатора возможно лишь на основе достаточно общих газодинамических моделей — полных и параболизированных (в сверхзвуковой области потока) уравнений Навье — Стокса. Это объясняется исключительной сложностью газодинамической структуры потока в полости резонатора (наличием в нем сильных продольных и поперечных градиентов давления, интенсивных скачков уплотнения, обширных дозвуковых зон) и существенным влиянием процессов молекулярного переноса импульса и энергии смеси, а также массы ее отдельных компонент как на локальные характеристики течения, так и на интегральные энергетические характеристики лазера.

Именно благодаря последнему обстоятельству сверхзвуковые химические лазеры непрерывного действия в литературе часто называют лазерами диффузионного типа [273, 274]. Тем не менее основной объем численных исследований процессов в сверхзвуковых НХЛ выполнен в настоящее время в рамках весьма грубых одномерных и квазиодномерных газодинамических моделей течения в полости резонатора (модель мгновенного смешения [487], модель фронта пламени [488]), которые в лучшем случае могут претендовать лишь на качественное описание рассматриваемых процессов, или на основе двумерного приближения узкого канала [489], применимость которого априори ограничена случаем расчетного режима пс-

течения струй горючего и окислителя в полость резонатора *). Такое положение обусловлено тем, что при расчете характеристик потока в полости резонаторов НХЛ и без того трудоемкая задача численного интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса для многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси еще более усложняется, так как в этом случае, кроме расчета полей скорости, давления, температуры и концентраций химических компонент, возникает необходимость в получении детальной информации о распределении частиц по различным квантовым состояниям, а также в определении характеристик генерируемого в системе когерентного излучения. Возникающие при этом трудности усугубляются сильным влиянием поля излучения на газодинамические параметры потока.

Как уже отмечалось в гл. 2, определенные успехи в преодолении указанных трудностей были достигнуты в работах [62, 138—142] на пути использования для решения рассматриваемой задачи экономичных, высокоустойчивых неявных линеаризованных конечно-разностных схем приближенной факторизации (см. п. 5.3.1), основанных на принципе расщепления стабилизирующих конечно-разностных операторов по пространственным направлениям и физическим процессам [31] и реализуемых с помощью скалярных прогонок и расчетов по явным формулам. В данной главе подробно излагаются основные этапы построения таких схем применительно к расчету течений в резонаторах НХЛ, описываются алгоритмы их численной реализации и приводятся некоторые результаты расчетов, полученные с помощью этих алгоритмов. Однако прежде чем непосредственно перейти к изложению этих вопросов, необходимо кратко остановиться на особенностях постановки рассматриваемых задач, связанных со спецификой конструкции сверхзвуковых НХЛ и протекающих в них радиационных процессов. Для определенности анализ этих особенностей проведем на примере НХЛ, работающего на молекулах фтористого водорода (HF), так как именно данный тип сверхзвуковых непрерывных химических лазеров получил в настоящее время наибольшее распространение [273, 274]. Это, однако, ни в коей мере не ограничивает универсальности описываемой в последующих параграфах методики расчета, которая без труда может быть переформулирована на случай расчета НХЛ, работающих

*) В рамках этого приближения (см. § 6) не учитывается наличие поперечного градиента давления в потоке, что автоматически исключает возможность его использования для моделирования нерасчетных режимов истечения струй реагентов в полость резонатора. Более того, даже в случае расчетных режимов истечения, когда давления на срезе сопел окислителя и горючего одинаковы, в ограниченном сверхзвуковом потоке в полости резонатора могут возникнуть значительные поперечные градиенты давления, обусловленные интенсивным локальным тепловыделением в результате протекания экзотермических реакций пакачки. Поэтому возможность использования приближения узкого канала и в этом случае не очевидна и нуждается в специальной проверке (см. § 23).

на других молекулах (DF, HCl и т. п.), или расчета других типов сверхзвуковых смесительных лазеров на основе систем уравнений Навье — Стокса и Рейнольдса.

§ 21. Постановка задач о расчете ламинарного течения в полости резонаторов сверхзвуковых HF-НХЛ на основе полных уравнений Навье — Стокса

21.1. Основные физические допущения. Схема течения в резонаторе HF-НХЛ, работающем в режиме генерации, изображена на рис. 5.1.

В полость резонатора лазера, который в простейшем случае образован двумя плоскими зеркалами с коэффициентами отражения r_1 и r_2 , через систему сверхзвуковых сопел поступает смесь частично диссоциированного фтора с каким-либо инертным разбавителем

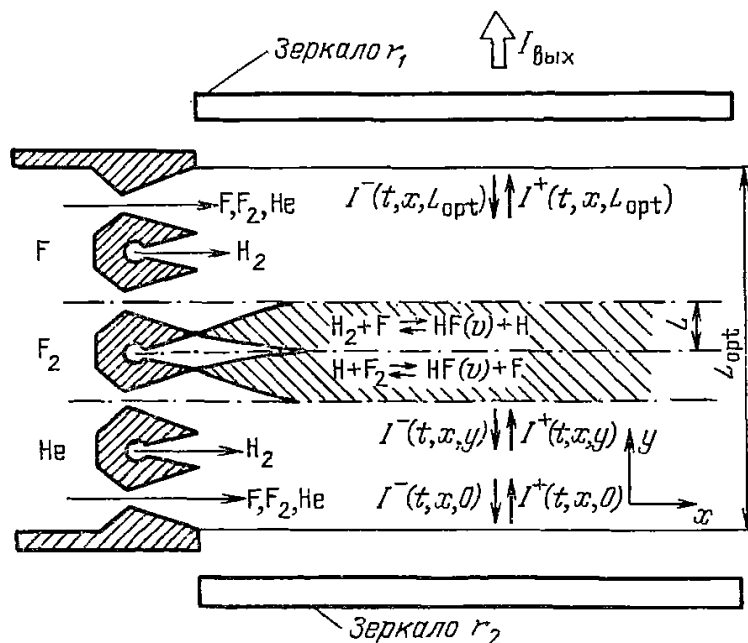
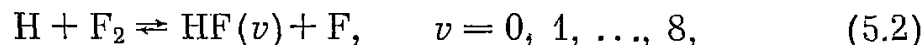
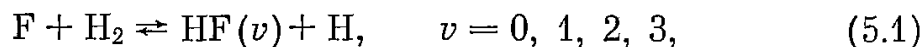


Рис. 5.1. Схема HF-НХЛ с плоской конструкцией соплового блока

(гелием или азотом) и в общем случае с другими побочными веществами, состав которых зависит от способа получения диссоциированного фтора. Туда же через систему промежуточных сопел подается молекулярный водород H_2 .

При смешении струй горючего (H_2) и окислителя ($F + F_2$) в полости резонатора протекают реакции накачки [274]



в результате чего в потоке образуются молекулы фтористого водорода $HF(v)$ с неравновесным распределением по колебательно-вращательным квантовым энергетическим уровням, т. е. создается ин-

версная среда, которая при выполнении определенных условий может генерировать когерентное излучение на колебательно-вращательных переходах молекул $\text{HF}(\nu)$ (работа в режиме генерации) или усиливать внешнее когерентное излучение, если его спектр содержит частоты, совпадающие с собственными частотами колебательно-вращательных переходов молекул HF (работа в режиме усиления).

Наряду с плоской конструкцией соплового блока, схематически изображенной на рис. 5.1, используются и другие типы сопловых блоков [273, 274], в частности, цилиндрическая конструкция, изображенная на рис. 5.2. При использовании цилиндрических сопловых блоков смешение реагентов в полости резонатора происходит в системе струй, расширяющихся в радиальном направлении от центра соплового блока, имеющего радиус R_0 .

Как в первом, так и во втором случае, течение в полости резонатора можно приближенно рассматривать как двумерное (плоское или осесимметричное соответственно) [490].

Если предположить, что наряду с кинетикой элементарных химических реакций, протекающих в потоке в полости резонатора,

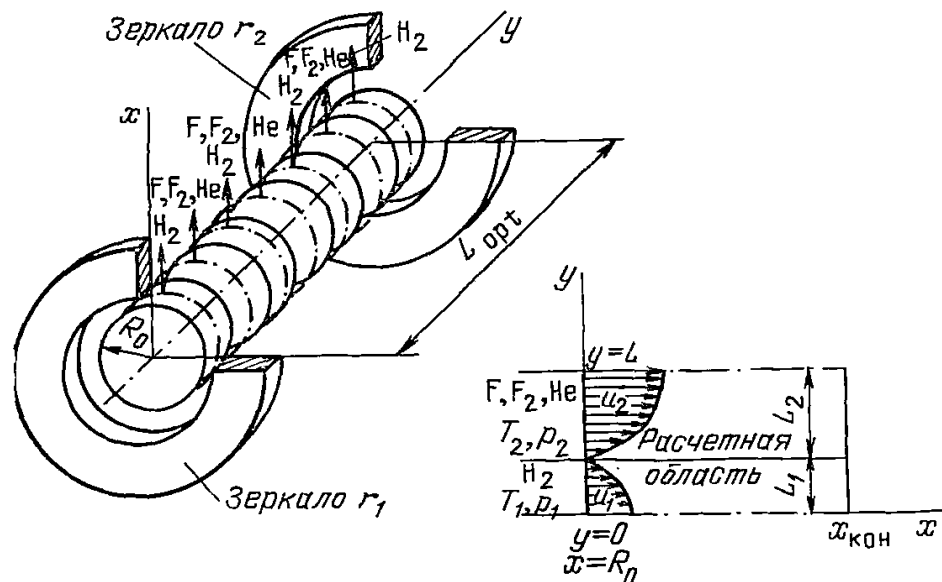


Рис. 5.2. Схема HF-НХЛ с цилиндрической конструкцией соплового блока

известна также кинетика процессов образования колебательно-возбужденных молекул и их релаксации, а именно так обстоит дело в случае HF-НХЛ [273], то в соответствии с подходом, развитым Эмануэлем [487], эти молекулы можно рассматривать как отдельные химические компоненты смеси, а элементарные физико-химические процессы, протекающие с их участием, — как отдельные «химические» реакции.

При описании радиационных процессов, протекающих в полости резонатора, будем предполагать, что спонтанным излучением возбужденных молекул можно пренебречь по сравнению с вынужден-

ным (стимулированным) излучением. При этом каждый акт вынужденного излучения (поглощения) света молекулами $\text{HF}(\nu)$ сопровождается переходом излучающей (поглощающей) молекулы на один из более низких (высоких) колебательно-вращательных квантовых уровней, т. е. в соответствии с предыдущим предположением приводит к взаимному превращению «химических» компонент смеси.

Кроме перечисленных допущений, носящих весьма общий характер, при описании процессов, протекающих в резонаторах HF -НХЛ, можно использовать ряд дополнительных упрощающих предположений, справедливость которых для данного типа лазеров обосновывается в работах [273, 274, 487, 491].

1. Многоквантовыми излучающими переходами между колебательными энергетическими уровнями молекул $\text{HF}(\nu)$ можно пренебречь.

2. На каждом колебательном уровне молекул $\text{HF}(\nu)$ имеет место равновесное больцмановское распределение этих молекул по вращательным квантовым подуровням при вращательной температуре, равной локальной термодинамической температуре смеси. При этом, как показано в [487], генерация когерентного излучения может иметь место только в P -ветви колебательно-вращательных переходов молекул $\text{HF}(\nu)$, т. е. на переходах $(\nu + 1, j_R^* - 1) \rightarrow (\nu, j_R^*)$, где j_R^* — вращательное квантовое число перехода, при котором интегральный оптический коэффициент усиления рассматриваемой колебательной полосы $\nu + 1 \rightarrow \nu$ принимает максимальное значение, т. е.

$$\int_0^{L_{\text{opt}}} \alpha_{\nu, j_R^*}(t, x, y) dy = \max_{j_R} \left\{ \int_0^{L_{\text{opt}}} \alpha_{\nu, j_R}(t, x, y) dy \right\}, \quad (5.3)$$

где x, y — декартовы или цилиндрические координаты, L_{opt} — величина оптического пути в резонаторе (см. рис. 5.1, 5.2), а α_{ν, j_R} — коэффициент усиления на переходе $(\nu + 1, j_R - 1) \rightarrow (\nu, j_R)$, зависящий от температуры, давления и состава смеси [272, 273].

Для определения интенсивности стимулированного излучения $I_{\nu+1, \nu}$ на отдельных колебательно-вращательных переходах колебательной полосы $(\nu + 1) \rightarrow \nu$ при анализе работы лазера в режиме усиления внешнего излучения используются уравнения переноса излучения в их «квазистационарной» форме [492]:

$$\frac{\partial}{\partial y} I_{\nu+1, \nu} = \alpha_{\nu+1, \nu} I_{\nu+1, \nu}, \quad (5.4)$$

где $\alpha_{\nu+1, \nu}$ и $I_{\nu+1, \nu}$ — коэффициенты усиления и интенсивности излучения для соответствующего колебательно-вращательного перехода.

При описании радиационных процессов в резонаторах сверхзвуковых HF -НХЛ, работающих в режиме генерации, будем использо-

вать подход, предложенный Эмануэлем в работе [487] (см. также гл. 8 [273]). Исходя из уравнения (5.4) и законов геометрической оптики, можно получить следующее соотношение для определения интенсивности излучения внутри резонатора лазера $I_{v+1,v}(t, x, y)$:

$$I_{v+1,v}(t, x, y) = I_{v+1,v}^+(t, x, 0) \left\{ \exp \left[\int_0^y \alpha_{v+1,v}(t, x, y) dy \right] + \right. \\ \left. + r_2 \exp [G_{v+1,v}(t, x)] \exp \left[\int_y^{L_{\text{opt}}} \alpha_{v+1,v}(t, x, y) dy \right] \right\}. \quad (5.5)$$

Здесь $I_{v+1,v}^+(t, x, 0)$ — значение интенсивности излучения, распространяющегося в положительном направлении вдоль оси y (см. рис. 5.1, 5.2) в сечении x резонатора при $y = 0$, а $G_{v+1,v}(t, x) = \int_0^{L_{\text{opt}}} \alpha_{v+1,v}(t, x, y) dy$ — интегральный оптический коэффициент усиления на переходе $(v+1, j_R - 1) \rightarrow (v, j_R)$.

Для определения неизвестной величины $I_{v+1,v}^+(t, x, 0)$ служит так называемое условие квазистационарной генерации [487]:

$$\int_0^{L_{\text{opt}}} \alpha_{v+1,v}(t, x, y) dy = G_0 \equiv -\frac{1}{2} \ln(r_1 r_2), \quad (5.6)$$

где G_0 — пороговое значение интегрального коэффициента усиления.

Хотя (5.6) не содержит явно неизвестной величины $I_{v+1,v}(t, x, 0)$, однако неявная связь между $\alpha_{v+1,v}(t, x, y)$ и этой величиной существует: оптические коэффициенты усиления, как уже отмечалось, являются функциями температуры, давления и состава смеси, которые, в свою очередь, очевидно, зависят от интенсивности излучения $I_{v+1,v}(t, x, y)$ в резонаторе, определяемой в соответствии с (5.5) через $I_{v+1,v}(t, x, 0)$.

При использовании соотношений (5.5), (5.6) следует помнить (см. (5.3)), что значение вращательного квантового числа j_R^* генерирующего перехода выбирается таким образом, чтобы интегральный оптический коэффициент усиления P -ветви $G_{v+1,v}$ колебательной полосы $(v+1) \rightarrow v$ имел максимальное по j_R значение. В результате величина j_R^* , неявно входящая в (5.5), (5.6), оказывается зависящей от колебательного квантового числа перехода v , а также от времени и координаты рассматриваемого сечения резонатора x (так называемое явление « j -сдвига» [274]). Если интегральный коэффициент усиления $G_{v+1,v}$ ни при каких j_R не достигает порогового значения, то считается, что генерация в колеба-

тельной полосе $(v+1) \rightarrow v$ в данном сечении в рассматриваемый момент времени отсутствует, т. е. $I_{v+1,v}(t, x) = 0$.

21.2. Система уравнений и граничные условия. С использованием сформулированных предположений относительно кинетики колебательно-вращательного энергообмена и характера радиационных процессов в HF-НХЛ общая система уравнений Навье — Стокса для многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси (2.2) — (2.6) применительно к рассматриваемому случаю течения в полости резонатора лазера с плоским (декартова система координат $(\alpha = 0)$) или цилиндрическим (цилиндрическая система координат $(\alpha = 1)$) сопловым блоком может быть представлена в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial (x^\alpha \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{4}{3} \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\alpha}{x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{2\mu}{x} \right) u \right] \right\} = 0, \quad (5.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial (x^\alpha \rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial x^\alpha \mu}{\partial x} \right) \right\} = 0, \quad (5.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial (x^\alpha \rho ue)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho ve)}{\partial y} + (\gamma - 1) M^2 p \left(\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ - \frac{2}{\text{Re}} (\gamma - 1) M^2 \mu \Phi - \frac{1}{\text{Re Pr}} \left[\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] - \\ - \frac{1}{\text{Re Sc}} \sum_{k=1}^{N_k} \left\{ \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha h_k \left(\frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial x} - \delta_{J_{kx}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h_k \left(\frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial y} - \delta_{J_{ky}} \right) \right] \right\} + \\ + \Pi \sum_{k=1}^{N_p} \alpha_k I_k = 0, \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = \dot{S}^2 - \frac{1}{3} (\text{div } V)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \alpha \left(\frac{u}{x} \right)^2 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2, \quad (5.11) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho c_k}{\partial t} + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial (x^\alpha \rho u c_k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v c_k)}{\partial y} - \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \dot{w}_{ks} =$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\text{Re Sc}} \left[\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{\text{Re Sc}} \left[\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha \delta J_{kx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta J_{ky}) \right] - \left[\frac{\alpha_{k-1} I_{k-1}}{\nu_{k-1}} - \frac{\alpha_k I_k}{\nu_k} \right] = 0 \quad (5.12) \\
& (k = 1, 2, \dots, N_v + 1; \quad \alpha_0 = \alpha_{N_v+1} = 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \rho c_k}{\partial t} + \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial (x^\alpha \rho u c_k)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v c_k)}{\partial y} - \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \dot{w}_{ks} - \\
& - \frac{1}{\text{Re Sc}} \left[\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{1}{\text{Re Sc}} \left[\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha \delta J_{kx}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta J_{ky}) \right] = 0 \quad (5.13) \\
& (k = N_v + 2, \dots, N_k).
\end{aligned}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на направления x и y соответственно, $e = \sum_{k=1}^{N_k} c_k e_k = \sum_{k=1}^{N_k} c_k \left(\int_{T_0}^T c_{vk} dT + h_k^0 \right)$ — удельная внутренняя энергия смеси, а величины $B_k, \delta J_{kx}$ и δJ_{ky} определяются общими соотношениями (2.31) без учета термодиффузии. Молекулам $\text{HF}(v)$ на колебательно-вращательных квантовых уровнях $v = 0, 1, \dots, N_v$ присвоены номера $k = 1, \dots, N_v + 1$ соответственно. Через α_k, I_k, ν_k обозначены оптический коэффициент усиления, интенсивность и частота излучения, отвечающие переходу P -ветви возбужденных молекул $\text{HF}(v) \quad (v+1, j_R-1) \rightarrow (v, j_R)$, причем $k = v+1$.

Дополнительный по сравнению с исходным уравнением переноса энергии (2.4) член уравнения (5.10), содержащий интенсивность излучения I_k , описывает процесс поглощения (выделения) тепла при взаимодействии излучения с газовым потоком. Аналогичный член уравнения переноса массы излучающих компонент смеси (молекул $\text{HF}(v)$) (5.12) представляет собой не что иное, как химический источниковый член, поскольку каждый акт поглощения (выделения) кванта света молекулой $\text{HF}(v)$ сопровождается ее переходом в новое квантовое энергетическое состояние, т. е. согласно принятому подходу — превращением этой молекулы в молекулу другого сорта.

В качестве масштабов при записи безразмерных уравнений неразрывности (5.7), переноса импульса (5.8), (5.9), энергии (5.10) и массы излучающих (5.12) и неизлучающих (5.13) компонент смеси использовались следующие характерные для рассматриваемого течения размерные параметры: расстояние между плоскостями

симметрии струй окислителя и горючего L — для координат; значения скорости, плотности и температуры в плоскости симметрии на срезе сопла окислителя u^0 , ρ^0 и T^0 — для скорости, плотности и температуры соответственно; $t^0 = L/u^0$ — для времени; $\rho^0(u^0)^2$ — для давления; значения вязкости μ^0 , теплопроводности λ^0 , удельной теплоемкости c_p^0 , максимального из бинарных коэффициентов диффузии рассматриваемой смеси D^0 и молекулярного веса смеси m^0 , вычисленные при параметрах потока на оси сопла окислителя, — для вязкости, теплопроводности, теплоемкости, коэффициентов бинарной диффузии и молекулярного веса соответственно; $c_p^0 T^0$ — для внутренней энергии и энтальпии; $J^0 = \rho^0 D^0 / L$ — для диффузионных потоков, $(k_s^+)^0 = k_s^+(T^0)$ — для констант скоростей прямых ре-

акций; $(K_{ps})^0 = (p^0)^{h=1} \sum_{N_k} (v''_{hs} - v'_{hs})$ — для констант равновесия; $(\dot{w}_s)^0 =$
 $= (k_s^+)^0 (\rho^0)^{h=1} \sum_{N_k} v'_{hs} \left/ (m^0)^{h=1} \sum_{N_k} v'_{hs} - 1 \right.$ — для скоростей образования компо-

нент в результате s -й химической реакции; максимальная из частот, имеющих в спектре генерации (усиления), ν^0 — для частот перехода ν_k ; пороговое значение коэффициента усиления $\alpha^0 = G_0/L_{\text{opt}}$ или величина $\alpha^0 = h N_A \nu^0 \rho^0 u^0 L_{\text{opt}} (m_{\text{HF}} I_{\text{max}}^- L)^{-1}$ и величина

$I^0 = h N_A \nu^0 \rho^0 u^0 L_{\text{opt}} (m_{\text{HF}} G_0 L)^{-1}$ или $I^0 = \max_k I_k^-$ — для коэффициен-

тов усиления и интенсивностей излучения I_k при работе лазера в режимах генерации или усиления соответственно (h — постоянная Планка, N_A — число Авогадро).

При таком выборе масштабов уравнения переноса излучения (5.4) и условия квазистационарной генерации (5.6), используемые совместно с системой уравнений (5.7) — (5.13) для расчета течения в полости резонатора при работе лазера в режиме усиления и генерации соответственно, могут быть представлены в следующей безразмерной форме:

$$\frac{\partial I_k}{\partial y} = A \alpha_k I_k, \quad k = 1, 2, \dots, N_v, \quad (5.14)$$

$$\int_0^{L_{\text{opt}}/L} \alpha_k(t, x, y) dy = 1, \quad k = 1, 2, \dots, N_v. \quad (5.15)$$

Таким образом, наряду с безразмерными комплексами, характерными для течения многокомпонентной химически реагирующей газовой смеси при отсутствии излучения (см. (2.10) — (2.19)), в рассматриваемом случае течения в полости резонатора лазера исходная система уравнений содержит два дополнительных безразмер-

ных параметра подобия

$$\Pi = \frac{h N_A v^0}{m_{\text{HF}} c^0 T^0} \quad \text{и} \quad A = \alpha^0 L, \quad (5.16)$$

определяющих соответственно отношение характерной колебательной энергии и энтальпии в одном моле смеси (Π) и степень усиления излучения полосой активной лазерной среды, имеющей ширину L , (A).

Для замыкания системы уравнений (5.8) — (5.13), (5.14) или (5.8) — (5.13), (5.15) используется уравнение состояния в форме

$$\rho = \gamma M^2 \frac{pm}{T}, \quad (5.17)$$

выражение для скорости образования k -й компоненты в результате s -й химической реакции (2.9) в форме *)

$$\dot{w}_{ks} = m_k (v_{ks}'' - v_{ks}') k_s^+ \rho \sum_{l=1}^{N_k} v_{ls}' \left[\prod_{l=1}^{N_k} \left(\frac{c_l}{m_l} \right)^{v_{ls}'} - \frac{(pm)^{\sum_{i=1}^{N_k} (v_{is}'' - v_{is}')}}{K_{ps}} \prod_{l=1}^{N_k} \left(\frac{c_l}{m_l} \right)^{v_{ls}''} \right], \quad (5.18)$$

а также выражения, определяющие зависимости коэффициентов переноса смеси, ее теплофизических свойств и коэффициентов усиления α_k от температуры, давления и состава смеси.

Остановимся далее на постановке граничных условий к сформулированной системе уравнений. Как видно из рис. 5.1, 5.2, расчетная область в рассматриваемой задаче включает, вообще говоря, форкамеру, в которой тем или иным способом получается частично диссоциированный фтор, решетку сверхзвуковых сопел окислителя и горючего и канал, ограниченный стенками резонаторной полости. Выходная граница расчетной области должна, строго говоря, находиться на бесконечности. Очевидно, что численное интегрирование сформулированной выше системы уравнений в расчетной области столь сложной конфигурации является практически невозможным из-за ограниченности ресурсов современных ЭВМ. Как уже отмечалось в п. 5.2, такая ситуация является весьма характерной для большинства внутренних задач вычислительной гидроаэродинамики.

Для преодоления указанных трудностей необходимо сформулировать приближенные граничные условия на границах некоторой

*) Напомним, что молекулы $\text{HF}(v)$ в различных колебательных состояниях рассматриваются как отдельные компоненты смеси, а скорости их образования (исчезновения) в результате протекания реакций накачки (5.1), (5.2), процессов колебательно-колебательной ($v-v$) и колебательно-поступательной ($v-T$) релаксаций вычисляются с помощью (5.18).

условной расчетной области, конфигурация которой является, с одной стороны, достаточно простой, а с другой стороны, позволяет получить решение рассматриваемой задачи, т. е. определить параметры потока в полости резонатора и выходные энергетические характеристики лазера с требуемой степенью точности.

В качестве такой расчетной области можно использовать полосу, ограниченную плоскостями симметрии соседних сопел реактивов, поверхностью среза соплового блока $x = x_0$ ($x_0 = 0$ в случае плоского и $x_0 = R_0$ — в случае цилиндрического соплового блока) и поверхностью $x = x_{\text{кон}}$, выбор положения которой производится в процессе решения задачи. Конфигурация такой расчетной области изображена на рис. 5.3.

В качестве граничных условий на входной проницаемой границе указанной области или, иными словами, в качестве условий на входе в резонатор задаются профили всех искомых параметров потока на срезе соплового блока, т. е.

$$\Phi|_{x=x_0} = \Phi_{\text{вх}}(t, x_0, y), \quad (5.19)$$

где Φ — любая из искомых функций ρ, u, v, T, c_k ($k = 1, 2, \dots, N_k$).

При сверхзвуковом истечении струй реактивов в полость резонатора никаких ограничений на форму условий (5.19) с математической точки зрения не накладывается (см. п. 5.2.3). В этом смысле профили $\Phi_{\text{вх}}$ могут, вообще говоря, задаваться произвольно. Однако

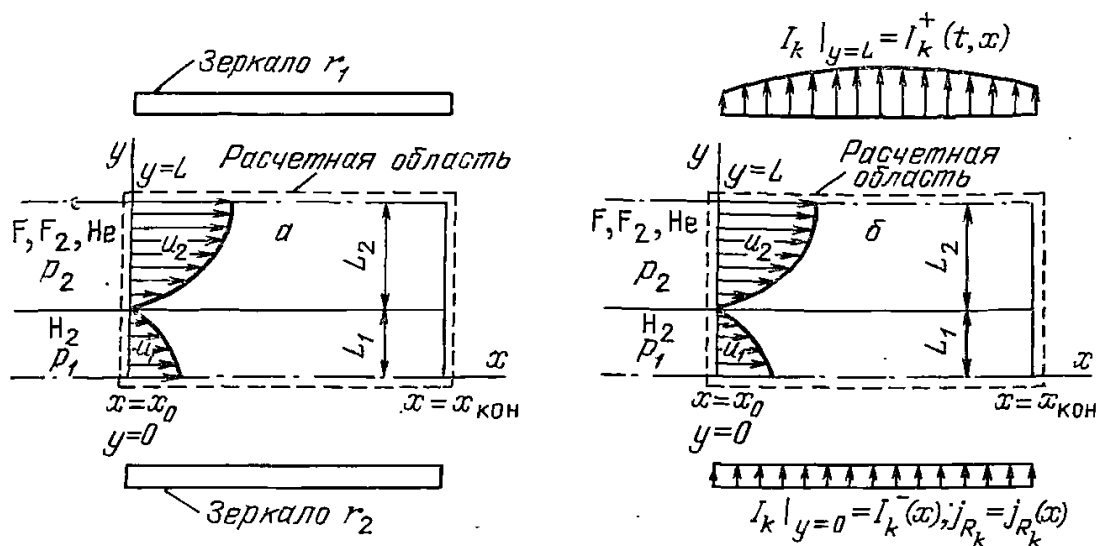


Рис. 5.3. Конфигурация расчетной области, используемой при анализе течения в полости резонаторов НХЛ: а) режим генерации, б) режим усиления

в том случае, когда целью расчета является моделирование некоторой реальной ситуации, условия на входе в полость резонатора (5.19) должны соответствовать условиям, реализуемым на эксперименте, т. е. должны задаваться непосредственно из опыта или определяться из независимого расчета течения в сопловом блоке (последний способ, очевидно, является оправданным лишь в том слу-

чае, если в окрестности соплового блока отсутствуют зоны рециркуляции и процессы распространения возмущений вверх по потоку в этой области можно не учитывать).

На проницаемой выходной границе расчетной области, т. е. при $x = x_{\text{кон}}$, задаются мягкие граничные условия вида

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_{x=x_{\text{кон}}} = 0, \quad (5.20)$$

причем значение $x_{\text{кон}}$ определяется таким образом, чтобы выходная граница расчетной области была полностью сверхзвуковой, так как только в этом случае условия (5.20) являются корректными (см. п. 5.2.3).

На верхней и нижней границах расчетной области, т. е. при $y = 1$ и $y = 0$, ставятся граничные условия симметрии

$$v = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (5.21)$$

Иными словами, течение в полости резонатора предполагается периодическим в поперечном направлении. В случае работы лазера в режиме генерации указанное предположение выполняется с высокой степенью точности, поскольку интенсивность излучения внутри резонатора, определяемая соотношением (5.5), является весьма слабой функцией поперечной координаты [273, 487]

$$I_k \simeq I_k(t, x) = \text{const}(y) \quad (k = 1, 2, \dots, N_v),$$

а краевыми эффектами, обусловленными влиянием на течение стенок лазерной полости, можно пренебречь в силу неравенства $L_{\text{opt}} \gg L$, которое справедливо для всех без исключения лазерных систем диффузионного типа [273, 274].

При работе лазера в режиме усиления использование условий симметрии (5.21) является в общем случае неоправданным, так как наличие в лазерной полости излучения с переменной по поперечной координате интенсивностью нарушает периодическую структуру рассматриваемого течения [490]. Поэтому численное моделирование процессов в НФ-НХЛ, работающих в режиме усиления, основанное на использовании граничных условий (5.21), приходится ограничить случаем, когда интенсивность сигнала на входе в усилитель $I_k^-(x)$ (см. рис. 5.3, б) достаточно велика для того, чтобы выполнялись неравенства

$$\left| \frac{I_k(t, x, y) - I_k^-(x)}{I_k^-(x)} \right| \ll 1 \quad (k = 1, 2, \dots, N_v),$$

что соответствует работе усилителя в режиме насыщения, являющемуся наиболее важным с практической точки зрения. Выполнение

этих неравенств позволяет считать, что зависимость интенсивности излучения от поперечной координаты слабо искажает перподическую структуру потока в лазерной полости. Тем самым открывается возможность использования граничных условий (5.21) и при анализе работы лазера в режиме усиления. При этом наряду с условиями (5.19) — (5.21) к уравнениям Навье — Стокса (5.7) — (5.13) необходимо поставить граничные условия к уравнениям переноса излучения (5.14). В качестве таких условий, очевидно, можно задавать интенсивность входного сигнала и его спектр:

$$I_{v,j_R}|_{y=0} = I_{v,j_R}^-(x), \quad j_R|_{y=0} = j_R(v, x) \quad (v = 0, 1, \dots, N_s - 1). \quad (5.22)$$

Наконец, при работе лазера как в режиме усиления, так и в режиме генерации необходимо поставить начальные условия к системе уравнений Навье — Стокса (5.7) — (5.13), используемой для описания течения в полости резонатора, т. е. задать распределение искомых функций в расчетной области (рис. 5.3) в начальный момент времени

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(x, y) \quad \text{при } x_0 < x < x_{\text{юн}}, \quad 0 < y < 1. \quad (5.23)$$

В случае решения нестационарной задачи указанные распределения должны отражать ту или иную реальную ситуацию, имеющую место в полости резонатора в начальный момент времени, а при решении стационарной задачи методом установления поля $\Phi_0(x, y)$ выполняют роль начального приближения и могут быть заданы, вообще говоря, произвольно.

Завершая обсуждение постановки рассматриваемой задачи, отметим, что все уравнения системы (5.7) — (5.13), за исключением уравнения переноса энергии (5.10), записаны относительно консервативных переменных. Выбор в качестве основной переменной в уравнении энергии неконсервативной величины внутренней энергии re вместо консервативной полной энергии $E = \rho \left(e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$ обусловлен тем, что при расчете сверхзвуковых течений это позволяет исключить дополнительную погрешность в определении температуры смеси, возникающую при вычислении разности двух близких величин E и $\rho \frac{u^2 + v^2}{2}$. Указанное обстоятельство является весьма важным при расчете течений смесей с неравновесными физико-химическими процессами [32, 91] вследствие сильной нелинейной зависимости от температуры соответствующих этим процессам источников членов в исходной системе уравнений. Кроме того, использование такой формы уравнения энергии оказывается более удобным с точки зрения реализации описываемого ниже численного алгоритма.

§ 22. Метод расчета

22.1. Преобразование исходной системы уравнений к форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам. Для численного интегрирования системы уравнений (5.7) — (5.15) с граничными и начальными условиями (5.19) — (5.21), (5.23) используется неявная многошаговая схема расщепления по координатам и физическим процессам, при построении которой применяются общие принципы разработки схем такого типа, подробно описанные в монографии В. М. Ковени и Н. Н. Яненко [31]. В соответствии с этими принципами первым этапом построения схемы является представление в форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам исходной системы дифференциальных уравнений. Однако прежде чем приступить к этому этапу, удобно записать систему уравнений (5.7) — (5.13) в условной векторной форме:

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \mathbf{W} + \mathbf{Q}_{ch} + \mathbf{Q}_R = 0. \quad (5.24)$$

Здесь $\mathbf{F} = [\rho, \rho u, \rho v, \rho e, \rho c_k]^T$ — вектор «консервативных» переменных; векторы $\mathbf{Q}_{ch}$ и $\mathbf{Q}_R$ включают соответственно химические и радиационные источниковые члены исходной системы уравнений:

$$\mathbf{Q}_{ch} = \left[0, 0, 0, 0, - \sum_{s=1}^{N_R} Da_s w_{hs} \right]^T, \quad (5.25)$$

$$\mathbf{Q}_R = [0, 0, 0, R_e, R_{c_1}, R_{c_2}, \dots, R_{c_{N_v+1}}, 0, \dots, 0]^T, \quad (5.26)$$

$$R_e = \prod_{k=1}^{N_v} \alpha_k I_k, \quad R_{c_k} = \frac{\alpha_{k-1} I_{k-1}}{v_{k-1}} - \frac{\alpha_k I_k}{v_k}, \quad (5.27)$$

$$\alpha_0 = \alpha_{N_v+1} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N_v.$$

В вектор $\mathbf{W}$ включены остальные члены исходной системы уравнений, т. е.

$$\mathbf{W} = \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha \left(u \mathbf{F} - \frac{q_1}{Re} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \mathbf{F} - \frac{q_2}{Re} \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial y} \right) + \mathbf{G}. \quad (5.28)$$

Здесь $\mathbf{f}_1 = [\rho, u, v, T, c_k]^T$, $\mathbf{G} = [0, G_u, G_v, G_e, G_{c_k}]^T$,

$$q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{Pr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{B_k Sc} \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{Pr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho}{B_k Sc} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

$$G_u = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{2\mu}{x} \right) u \right], \quad (5.30)$$

$$G_v = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re} x^\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial x^\alpha u}{\partial x} \right) \right], \quad (5.31)$$

$$G_e' = (\gamma - 1) M^2 \left[p \left(\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2}{\text{Re}} \mu \Phi \right] - \\ - \frac{1}{\text{Re} \text{Sc}} \sum_{k=1}^{N_k} \left\{ \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha h_k \left(\frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial x} - \delta_{J_{kx}} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h_k \left(\frac{\rho}{B_k} \frac{\partial c_k}{\partial y} - \delta_{J_{ky}} \right) \right] \right\} \quad (5.32)$$

$$G_{c_k} = \frac{1}{\text{Re} \text{Sc}} \left[\frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} (x^\alpha \delta_{J_{kx}}) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta_{J_{ky}}) \right]. \quad (5.33)$$

В (5.24) — (5.28) использована условная форма записи векторов размерности $N = N_k + 4$ и матриц размерности $N \times N$, например, $\mathbf{f}_1 = [\rho, u, v, T, c_k]^T \equiv [\rho, u, v, T, c_1, c_2, \dots, c_{N_k}]^T$, которая в дальнейшем применяется без специальных оговорок.

Для представления системы уравнений (5.24) в форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам перейдем в ней от вектора консервативных переменных $\mathbf{F}$ к вектору основных переменных $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f} = [\rho, u, v, e, c_k]^T. \quad (5.34)$$

Тогда, вводя матрицу перехода $B = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{f}} \right)^{-1}$,

$$B = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -e & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c_k & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.35)$$

получим

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + B(\mathbf{W} + \mathbf{Q}_{ch} + \mathbf{Q}_R) = 0. \quad (5.36)$$

Входящие в вектор $\mathbf{W}$ пространственные производные от давления и температуры необходимо выразить через производные от основных переменных. Это можно сделать с помощью соотношений

$$\frac{\partial T}{\partial x_l} = \frac{1}{c_v} \left(\frac{\partial e}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^{N_k} e_k \frac{\partial c_k}{\partial x_l} \right), \quad (5.37)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_l} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_l} + \frac{p}{c_v T} \frac{\partial e}{\partial x_l} + p \sum_{k=1}^{N_k} \left(\frac{m}{m_k} - \frac{e_k}{c_v T} \right) \frac{\partial c_k}{\partial x_l},$$

вытекающих из уравнения состояния и определения удельной теплоемкости смеси.

С использованием (5.35), (5.37) вектор $W_1 = BW$ может быть представлен в следующей форме расщепления по координатам и физическим процессам:

$$W_1 = \sum_{p=1}^4 \Omega_p f + H. \quad (5.38)$$

Введенные в (6.38) дифференциальные матричные операторы Ω_1 и Ω_2 , так же как и в [150], включают члены, описывающие конвективный и вязкий перенос в направлениях x и y соответственно:

$$\Omega_1 = u \begin{bmatrix} \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} - \frac{1}{\text{Re } \rho} \frac{1}{x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha q'_1 \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

$$\Omega_2 = vE \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re } \rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(q'_2 \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Здесь E — единичная матрица, а матрицы q'_1 и q'_2 получаются из матриц q_1 и q_2 (5.29) заменой в последних λ на λ/c_v .

Операторы Ω_3 и Ω_4 в (5.38) содержат члены типа $\text{div } v$ в уравнениях неразрывности и энергии, свободные члены в проекции уравнения переноса импульса на ось x (в случае осесимметричного течения), члены, связанные с градиентом давления, члены с производными от концентраций компонент, появляющиеся в уравнении энергии вследствие использования (5.37), а также часть членов, описывающих перенос энергии за счет диффузии компонент (см. п. 5.3.4):

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho}{x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\text{Re } \rho x} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{2\mu}{x} \right) & 0 & \frac{p}{\rho c_v T} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{p}{\rho} \left(\frac{m}{m_h} - \frac{e_h}{c_v T} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\gamma - 1) M^2 \frac{p}{\rho x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x} & 0 & 0 & -\frac{1}{\text{Re } \rho x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^\alpha \left(\frac{1}{\text{Sc}} \frac{\rho h_h}{B_h} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\lambda e_h}{c_v} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \rho \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{p}{\rho c_v T} \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & (\gamma - 1) M^2 \frac{p}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{p}{\rho} \left(\frac{m}{m_k} - \frac{e_k}{c_v T} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{\text{Sc}} \frac{\rho h_k}{B_k} - \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\lambda e_k}{c_v} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \end{bmatrix}.$$

Наконец, вектор $\mathbf{H}$ в (5.38) включает члены со смешанными производными из уравнений переноса импульса и диссипативный член уравнения переноса энергии, а также члены этого уравнения и уравнений переноса массы отдельных компонентов смеси, содержащие величины δJ_{kx} , δJ_{ky} .

Подставляя в уравнение (5.36) выражения вектора $\mathbf{W}_1$ в форме расщепления по координатам и физическим процессам (5.38), получим в результате следующее уравнение, лежащее в основе предлагаемой конечно-разностной схемы расщепления:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{p=1}^4 \Omega_p \mathbf{f} + \mathbf{Q}_{ch_1} + \mathbf{Q}_{R_1} + \mathbf{H} = 0, \quad (5.39)$$

где $\mathbf{Q}_{ch_1} = B \mathbf{Q}_{ch} = \frac{1}{\rho} \mathbf{Q}_{ch}$; $\mathbf{Q}_{R_1} = B \mathbf{Q}_R = \frac{1}{\rho} \mathbf{Q}_R$.

22.2. Конечно-разностная схема и алгоритм расчета. В силу существенного различия сформулированных в п. 21.2 постановок задач о расчете течения в полости резонатора НХЛ при работе лазера в режимах генерации и усиления излучения, соответствующие алгоритмы расчета также несколько отличаются друг от друга. Поэтому рассмотрим вначале наиболее сложный случай, а именно работу НХЛ в режиме генерации, а затем остановимся на изменениях, которые необходимо внести в конечно-разностную схему и алгоритм расчета при определении характеристик непрерывного химического усилителя.

Режим генерации. В этом случае расчет течения в полости резонатора НФ-НХЛ сводится к определению полей газодинамических и термодинамических переменных $\mathbf{f}(t, x, y)$, а также интенсивности излучения отдельных колебательных полос молекул $\text{HF}(v) - I_k = I_k(t, x)$, $k = 1, 2, \dots, N_v$, удовлетворяющих системе уравнений Навье — Стокса (5.7) — (5.13), граничным и начальным условиям (5.19) — (5.21), а также условиям квазистационарной генерации (5.15). Наряду с этим необходимо определить спектр генерируемого

лазером когерентного излучения, т. е. найти набор вращательных квантовых чисел $j_R = j_R(v, t, x)$ для каждого из генерирующих переходов.

Для решения описанной задачи введем в области $D \{x_0 \leq x \leq x_{\text{кон}}, 0 \leq y \leq 1\}$ равномерную разностную сетку, содержащую $N_x \times N_y$ узлов, с шагами $h_x = (x_{\text{кон}} - x_0)/(N_x - 1)$ и $h_y = 1/(N_y - 1)$.

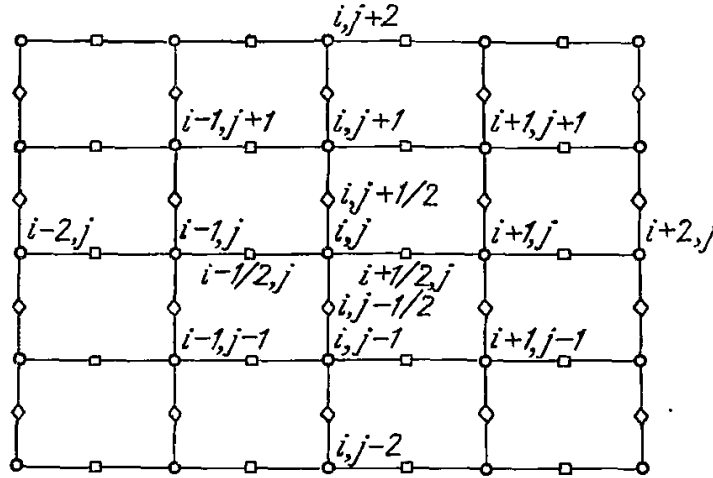


Рис. 5.4. Шаблон конечно-разностной схемы

Пусть τ^n — шаг по времени, n — номер временного слоя (при решении стационарных задач методом установления n — номер итерации, τ^n — итерационный параметр). Определим в узлах сетки сеточные функции ρ_h^n, u_h^n, v_h^n и т. д. и N -мерную сеточную вектор-функцию $\mathbf{f}_h = [\rho_h^n, u_h^n, v_h^n, e_h^n, (c_k)_h^n]^T$. Введем также N_v -мерную сеточную вектор-функцию $\mathbf{I}_h^n$ с компонентами $(I_k)_h^n, k = 1, 2, \dots, N_v$, определенную в сечениях $x = x_i = x_0 + (i-1)h_x, i = 1, 2, \dots, N_x$.

Наряду с описанной выше основной сеткой введем в области D две вспомогательные сетки, сдвинутые относительно основной на $h_x/2$ и $h_y/2$ соответственно (рис. 5.4). В узлах первой из них определим сеточные функции $(J_{hx})_h^n$ и $(\delta J_{hx})_h^n$, а в узлах второй — функции $(J_{hy})_h^n$ и $(\delta J_{hy})_h^n$.

Для численного решения системы уравнений (5.39) построим следующую неявную разностную схему расщепления по координатам и физическим процессам:

$$(E + \tau^n \Lambda_{ch}^n) \xi^{n+1/7} = -\tau^n B_h^n [W_h^{n,l} + (Q_{ch})_h^n + (Q_R)_h^n], \quad (5.40.1)$$

$$(E + \tau^n \Omega_{1h}^n) \xi^{n+2/7} = \xi^{n+1/7}, \quad (5.40.2)$$

$$(E + \tau^n \Omega_{2h}^n) \xi^{n+3/7} = \xi^{n+2/7}, \quad (5.40.3)$$

$$(E + \tau^n \Omega_{3h}^n) \xi^{n+4/7} = \xi^{n+3/7}, \quad (5.40.4)$$

$$(E + \tau^n \Omega_{4h}^n) \xi^{n+5/7} = \xi^{n+4/7}, \quad (5.40.5)$$

$$(E + \tau^n \Lambda_\alpha^n) \xi^{n+6/7} = \xi^{n+5/7}, \quad (5.40.6)$$

$$\xi^{n+1} + \tau^n \Lambda_I^n \xi_I^{n+1} = \xi^{n+6/7}, \quad (5.40.7)$$

$$f_h^{n+1} = f_h^n + \xi^{n+1}, \quad (5.40.8)$$

$$I_h^{n+1} = I_h^n + \xi_I^{n+1}. \quad (5.40.9)$$

Здесь $\xi^{n+1/7}$, $\xi^{n+2/7}$, $\xi^{n+3/7}$, $\xi^{n+4/7}$, $\xi^{n+5/7}$, $\xi^{n+6/7}$ — вспомогательные N -мерные векторы, $\xi = [\xi_\rho, \xi_u, \xi_v, \xi_e, \xi_{c_k}]^T$, а ξ^{n+1} (вектор размерности N) и ξ_I^{n+1} (вектор размерности N_v) — векторы невязок (приращений искомых переменных на одном временном шаге), определяемые соотношениями (5.40.8) и (5.40.9). Вектор $W_h^{n,l}$ в (5.40.1) аппроксимирует в узлах основной сетки вектор W с порядком точности l ($l=1$ или 2); конечно-разностные операторы Ω_{ph}^n аппроксимируют соответствующие дифференциальные операторы Ω_p с первым порядком точности; матрицы Λ_{ch}^n , Λ_α^n (размерности $N \times N$) и Λ_I^n (размерности $N \times N_v$) определяются соотношениями

$$\Lambda_{ch} \xi = \frac{1}{\rho} \left[0, 0, 0, 0, - \left(\sum_{s=1}^{N_R} D a_s b_{hs} \right) \xi_{c_k} \right]^T, \\ \Lambda_\alpha \xi = \frac{1}{\rho} [0, 0, 0, R'_e, R'_{c_1}, R'_{c_2}, \dots, R_{c_{N_v+1}}, 0, \dots, 0]^T, \quad (5.41)$$

$$\Lambda_I \xi_I = \left(\frac{\partial Q_{R1}}{\partial I} \right) \xi_I = \frac{1}{\rho} [0, 0, 0, R''_e, R''_{c_1}, R''_{c_2}, \dots, R''_{c_{N_v+1}}, 0, \dots, 0]^T,$$

$$R'_e = \Pi \sum_{k=1}^{N_v} I_k (d_{h,k+1} \xi_{c_{k+1}} + d_{h,h} \xi_{c_h}),$$

$$R'_{c_1} = -I_1 v_1^{-1} (d_{1,2} \xi_{c_2} + d_{1,1} \xi_{c_1}),$$

$$R'_{c_k} = -I_k v_k^{-1} (d_{k,k+1} \xi_{c_{k+1}} + d_{h,k} \xi_{c_h}) + I_{k-1} v_{k-1}^{-1} (d_{k-1,k} \xi_{c_k} + \\ + d_{k-1,k-1} \xi_{c_{k-1}}), \quad k = 1, 2, \dots, N_v,$$

$$R'_{c_{N_v+1}} = I_{N_v} v_{N_v}^{-1} (d_{N_v, N_v+1} \xi_{c_{N_v+1}} + d_{N_v, N_v} \xi_{c_{N_v}}),$$

$$R''_e = \Pi \sum_{k=1}^{N_v} \alpha_k \xi_{I_k},$$

$$R''_{c_1} = -\alpha_1 v_1^{-1} \xi_{I_1},$$

$$R''_{c_k} = -\alpha_k v_k^{-1} \xi_{I_k} + \alpha_{k-1} v_{k-1}^{-1} \xi_{I_{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, N_v,$$

$$R''_{c_{N_v+1}} = \alpha_{N_v} v_{N_v}^{-1} \xi_{I_{N_v}}.$$

Величины b_{hs} в (5.41) представляют собой производные от массовой скорости образования k -й компоненты смеси в результате s -й химической реакции $\dot{w}_{hs}$ (5.18) по концентрации этой (k -й) компоненты и определяются по формулам:

$$b_{hs} = \frac{\partial \dot{w}_{hs}}{\partial c_h} = (v_{hs}'' - v_{hs}') k_s^+ \rho \sum_{i=1}^{N_h} v_{is}' \left[v_{hs}' \left(\frac{c_h}{m_h} \right)^{v_{hs}'-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{N_h} \left(\frac{c_i}{m_i} \right)^{v_{is}'} - \right. \\ \left. - v_{hs}'' \frac{(pm) \sum_{i=1}^{N_h} (v_{is}'' - v_{is}')}{K_{ps}} \left(\frac{c_h}{m_h} \right)^{v_{hs}''-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq h}}^{N_h} \left(\frac{c_i}{m_i} \right)^{v_{is}''} \right], \quad (5.42)$$

а величины $d_{h,l}$ — производные от оптических коэффициентов усиления α_h по массовой концентрации молекул $\text{HF}(v)$, участвующих в рассматриваемом колебательном переходе

$$d_{h,l} = \frac{\partial \alpha_h}{\partial c_l} \quad (k = 1, 2, \dots, N_v; l = k, k + 1). \quad (5.43)$$

Эти величины, так же как и сами α_h , являются известными функциями температуры, давления и состава смеси.

После исключения в (5.40) дробных шагов получим следующую конечно-разностную схему типа универсального алгоритма [99]:

$$C_h^n \frac{f^{n+1} - f^n}{\tau^n} + C_h^n [(\Lambda_I)_h^n (I_h^{n+1} - I_h^n)] = \\ = -B_h^n [W_h^{n,l} + (Q_{ch})_h^n + (Q_R)_h^n], \quad (5.44)$$

$$C_h^n = (E + \tau^n \Lambda_{ch}^n) \prod_{p=1}^4 (E + \tau^n \Omega_{ph}^n) (E + \tau^n \Lambda_{ah}^n).$$

Из (5.44) видно, что построенная разностная схема аппроксимирует исходную систему уравнений (5.36) с точностью $O(\tau, h^l)$. При установлении по времени ($\partial f / \partial t \rightarrow 0$, $\partial I / \partial t \rightarrow 0$) схема (5.44), а следовательно и схема (5.40), аппроксимируют стационарную систему уравнений $W + Q_{ch} + Q_R = 0$ с порядком точности l .

Рассмотрим далее конкретные способы аппроксимации пространственных производных, входящих в операторы Ω_p и в вектор W , используемые при построении схемы (5.40).

Первые производные по координатам, входящие в операторы Ω_p и вектор W , аппроксимируются с помощью несимметричных (односторонних) разностей с порядком точности l ($l = 1, 2$), причем для аппроксимации этих производных в Ω_p используются двухточечные ($l = 1$), а в W — трехточечные ($l = 2$) разности [60], что позволяет построить разностную схему, имеющую при установлении, т. е. при

решении стационарных задач, второй порядок точности по пространственным переменным*). Аналогично тому, как это сделано в работах Ю. А. Березина, В. М. Ковени, Н. Н. Яненко [151], Н. Н. Яненко, В. М. Ковени [150], посвященных численному моделированию течений однородного вязкого газа, в операторах Ω_p для членов, связанных с градиентом давления в уравнениях переноса импульса (5.8), (5.9), выбираются «направления дифференцирования», обратные направлениям, используемым при аппроксимации первых производных, входящих в конвективные члены и члены типа $\operatorname{div} \mathbf{v}$ в уравнениях неразрывности (5.7) и переноса энергии (5.11).

«Направления дифференцирования» при аппроксимации вектора $\mathbf{W}$ выбираются такими же, как и при аппроксимации соответствующих членов в операторах Ω_p , что, согласно [150], обеспечивает высокую устойчивость конечно-разностной схемы, предложенной в этой работе для численного интегрирования уравнений Навье — Стокса для однородного вязкого газа.

Для аппроксимации вторых (повторных и смешанных) производных, входящих в операторы Ω_p и вектор $\mathbf{W}$, т. е. членов типа $\frac{\partial}{\partial s} \left(a \frac{\partial f}{\partial s} \right)$, где $s = x$ или y , используются центральные разности второго порядка точности, например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{ij} &\simeq (\Delta_x a \Delta_x) f_{ij} = \\ &= \frac{1}{2h_x^2} [(a_{ij} + a_{i+1,j})(f_{i+1,j} - f_{ij}) - (a_{ij} + a_{i-1,j})(f_{ij} - f_{i-1,j})], \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{ij} &\simeq (\Delta_x a \Delta_y) f_{ij} = \\ &= \frac{1}{4h_x h_y} [a_{i+1,j}(f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}) - a_{i-1,j}(f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1})]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Наконец, для аппроксимации членов, содержащих величины δJ_{ks} т. е. членов типа $\frac{\partial}{\partial s} (a \delta J_{ks})$, в узлах основной сетки также исполь-

*) Как показали численные эксперименты, в тех случаях, когда профили параметров потока на входе в расчетную область, задаваемые граничными условиями (5.19), имеют большие производные по y (являются сильно неоднородными), использование трехточечных разностей для аппроксимации первых производных в $\mathbf{W}_h^n$ приводит к нефизическим осцилляциям решения. Для подавления этих осцилляций в окрестности входа (2—3 слоя по продольной координате) используются односторонние двухточечные разности первого порядка. Кроме того, в тех случаях, когда использование односторонних трехточечных разностей в приграничных узлах сетки приводит к необходимости введения фиктивных «заграничных» точек, все первые производные в этих узлах аппроксимируются центральными разностями [493].

зуются центральные разности второго порядка точности, например,

$$\frac{\partial}{\partial x} (a \delta_{J_{hx}})_{ij} \simeq \frac{1}{h_x} \left[a_{i+\frac{1}{2},j} (\delta_{J_{hx}})_{i+\frac{1}{2},j} - a_{i-\frac{1}{2},j} (\delta_{J_{hx}})_{i-\frac{1}{2},j} \right], \quad (5.46)$$

где $(\delta_{J_{hx}})_{i \pm \frac{1}{2},j}$ — значения $\delta_{J_{hx}}$ в узлах соответствующей вспомогательной сетки (см. рис. 5.4), а значения $a_{i \pm \frac{1}{2},j}$ определяются как средние арифметические между значениями функции a в соседних узлах основной сетки

$$a_{i \pm \frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{i \pm 1,j}).$$

Для замыкания системы разностных уравнений (5.40) необходимо использовать разностные аналоги условий квазистационарной генерации (5.15), которые имеют вид

$$\sum_{j=1}^{N_y} A_j \left(\alpha_k + d_{k,h} \xi_{c_k}^{n+1} + d_{k,h+1} \xi_{c_{k+1}}^{n+1} \right)_{ij} = 1 \quad (5.47)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_v; \quad i = 1, 2, \dots, N_x)$$

и обеспечивают выполнение (5.15) на каждом временном слое с точностью $O(\tau, h')$ (величины A_j в (5.47) — коэффициенты квадратурных формул, аппроксимирующих интегралы в (5.15) с точностью $l_1 \geq l$).

Дискретные аналоги граничных условий (5.19) — (5.21) формулируются относительно невязок основных переменных и имеют следующий вид:

1. Условия (5.21) на плоскостях симметрии струй горючего и окислителя — $y = 0$ и $y = 1$, $j = 1$ и $j = N_y$:

$$\begin{aligned} (\xi_v)_{i,1} = (\xi_v)_{i,N_y} = 0; \quad -3(\xi_\Phi)_{i,1} + 4(\xi_\Phi)_{i,2} - (\xi_\Phi)_{i,3} = 0; \\ 3(\xi_\Phi)_{i,N_y} - 4(\xi_\Phi)_{i,N_y-1} + (\xi_\Phi)_{i,N_y-2} = 0; \\ i = 1, 2, \dots, N_x; \quad \Phi = \rho, u, e, c_k. \end{aligned} \quad (5.48)$$

2. Условия (5.19) на входной проницаемой границе — $x = x_0$, $i = 1$:

$$\xi_{1j} = f(t^{n+1}, x_0, y_j) - f(t^n, x_0, y_j); \quad j = 1, 2, \dots, N_y. \quad (5.49)$$

3. Условия (5.20) на выходной проницаемой границе — $x = x_{\text{кон}}$, $i = N_x$:

$$-\xi_{N_x-2,j} + 2\xi_{N_x-1,j} - \xi_{N_x,j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N_y. \quad (5.50)$$

Очевидно, что если начальные поля искомых функций (5.23) удовлетворяют разностным аналогам граничных условий (5.19) —

(5.21), то использование соотношений (5.48) — (5.50) обеспечивает выполнение граничных условий (5.19) — (5.21) на каждом целом временном слое со вторым порядком точности.

Прежде чем перейти к описанию алгоритма, с помощью которого реализуется конечно-разностная схема (5.40), целесообразно сделать несколько замечаний относительно ее общих свойств и прокомментировать соображения, использовавшиеся при построении этой схемы.

Поскольку вектор W в (5.36) записан в «почти консервативной» форме (исключение составляет лишь часть членов уравнения переноса энергии и проекции уравнения переноса импульса на ось x для осесимметричного течения), то при решении стационарных задач методом установления схема (5.40) также является почти консервативной, что благоприятно сказывается на ее точности [30—32].

По своей структуре схема (5.40) аналогична неявной высокоустойчивой схеме, предложенной в уже упоминавшейся работе Н. Н. Яненко и В. М. Ковени [150] для расчета течений однородного вязкого газа. Все дополнительные по сравнению с этим случаем члены исходной системы уравнений (5.7) — (5.17) аппроксимируются в схеме (5.40) неявно. Так, неявная аппроксимация диффузионных членов в уравнениях переноса массы компонент и энергии смеси обеспечивается используемой формой операторов Ω_p , химических источников членов Q_{ch} — введением дополнительного по сравнению с [150] дробного шага (5.40.1) со стабилизирующим оператором Λ_{ch} (5.41), а радиационных источников членов Q_R — введением дополнительных дробных шагов (5.40.6), (5.40.7) со стабилизирующими операторами Λ_α и Λ_I (5.41). Учитывая это, можно надеяться, что схема (5.40), так же как и схема [150], обладает высокой устойчивостью.

Наконец, форма стабилизирующих разностных операторов Λ_{ch} , Ω_p , Λ_α и Λ_I выбрана таким образом, что реализация схемы (5.40) оказывается возможной с помощью алгоритма скалярной трехточечной прогонки и вычислений по явным формулам, а использование системы соотношений Стефана — Максвелла в форме (2.31) позволяет построить алгоритм расчета диффузионных потоков отдельных компонент смеси, не требующий обращения матриц. Указанные обстоятельства обеспечивают высокую экономичность описанной схемы, сохраняющуюся и при расчете течений смеси с большим числом компонент.

Рассмотрим далее основные этапы алгоритма, с помощью которого реализуется схема (5.40).

1. Расчет «правых частей». На этом этапе во всех внутренних точках области D вычисляются значения элементов вектора $B_h^n [W_h^{n,l} + (Q_{ch})_h^n + (Q_R)_h^n]$ на n -м (известном) временном слое. При этом рассчитываются коэффициенты переноса и теплофизические свойства компонент смеси, определяются массовые скорости

образования компонент в результате химических реакций $\dot{w}_{ks}$, радиационные источниковые члены уравнений переноса массы отдельных компонент и энергии смеси, а также вычисляются величины b_{ks} , необходимые для реализации первого дробного шага (5.40.1). Величины $(\delta J_k)^n$, входящие в вектор $W_h^{n,l}$, определяются на данном этапе из разностных аналогов соотношений (2.31) без учета термодиффузии с использованием общего подхода, описанного в п. 5.3.4:

$$(\delta J_{kx})_{i+\frac{1}{2},j}^n = \left(\frac{c_k}{B_k}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \left\{ \left[\sum_{l=1}^{k-1} (J_{lx})_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{m}{D_{kl}m_l} - \frac{m}{D_{kh}m_k} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{l=k+1}^{N_k} (J_{lx})_{i+\frac{1}{2},j}^{n-1} \left(\frac{m}{D_{kl}m_l} - \frac{m}{D_{kh}m_k} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \right] - \left(\frac{\rho}{m} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{m_{i+1,j}^n - m_{ij}^n}{h_x} - \right. \\ \left. - \left[\frac{\rho}{p} \left(1 - \frac{m_k}{m} \right) \right]_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^n - p_{ij}^n}{h_x} \right\}, \quad (5.51)$$

$$(\delta J_{ky})_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \left(\frac{c_k}{B_k}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left\{ \left[\sum_{l=1}^{k-1} (J_{ly})_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{m}{D_{kl}m_l} - \frac{m}{D_{kh}m_k} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{l=k+1}^{N_k} (J_{ly})_{i,j+\frac{1}{2}}^{n-1} \left(\frac{m}{D_{kl}m_l} - \frac{m}{D_{kh}m_k} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{\rho}{m} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{m_{i,j+1}^n - m_{ij}^n}{h_y} - \left[\frac{\rho}{p} \left(1 - \frac{m_k}{m} \right) \right]_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^n - p_{ij}^n}{h_y} \right\}.$$

Соотношения (5.51) аппроксимируют (2.31) с точностью $O(\tau, h^2)$. При их использовании следует иметь в виду, что на первом временном шаге ($n=1$) при решении нестационарных задач величины $(J_k)^0$ в правых частях (5.51) должны удовлетворять системе соотношений Стефана — Максвелла, в которых значения «основных» переменных соответствуют начальным условиям (5.23). В случае же решения стационарных задач методом установления $(J_k)^0$ могут, вообще говоря, задаваться произвольно, например, определяться по общим формулам (2.31) без учета добавочных членов δJ_k , т. е.

$$(J_{kx})_{i+\frac{1}{2},j}^0 = - \left(\frac{\rho}{B_k} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^0 \frac{(c_k)_{i+1,j}^0 - (c_k)_{ij}^0}{h_x}, \\ (J_{ky})_{i,j+\frac{1}{2}}^0 = - \left(\frac{\rho}{B_k} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^0 \frac{(c_k)_{i,j+1}^0 - (c_k)_{ij}^0}{h_y}. \quad (5.52)$$

2. Дробные шаги (5.40.1) — (5.40.7). Реализация этих дробных шагов осуществляется последовательно с использованием на каждом шаге скалярных трехточечных прогонок и расчетов по явным формулам. Остановимся более подробно на реализации дробного шага (5.40.7), которая требует некоторых пояснений. Этот шаг схемы выполняется в два этапа. Вначале из разностных аналогов условий квазистационарной генерации (5.47) с помощью соотношений (5.40.7), которые в скалярной форме принимают вид

$$\xi_{\rho}^{n+1} = \xi_{\rho}^{n+6/7}; \quad \xi_u^{n+1} = \xi_u^{n+6/7}; \quad \xi_v^{n+1} = \xi_v^{n+6/7}; \quad (5.53)$$

$$\xi_e^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho^n} \prod_{k=1}^{N_k} \alpha_k^n \xi_{I_k}^{n+1} = \xi_e^{n+6/7}; \quad (5.54)$$

$$\xi_{c_1}^{n+1} - \frac{\tau^n}{\rho^n} \alpha_1^n (v_1^n)^{-1} \xi_{I_1}^{n+1} = \xi_{c_1}^{n+6/7}; \quad (5.55)$$

$$\xi_{c_k}^{n+1} - \frac{\tau^n}{\rho^n} [\alpha_k^n (v_k^n)^{-1} \xi_{I_k}^{n+1} - \alpha_{k-1}^n (v_{k-1}^n)^{-1} \xi_{I_{k-1}}^{n+1}] = \xi_{c_k}^{n+6/7}; \quad (5.56)$$

$$(k = 2, 3, \dots, N_v);$$

$$\xi_{c_{N_v+1}}^{n+1} + \frac{\tau^n}{\rho^n} \alpha_{N_v}^n (v_{N_v}^n)^{-1} \xi_{I_{N_v}}^{n+1} = \xi_{c_{N_v+1}}^{n+6/7}; \quad (5.57)$$

$$\xi_{c_k}^{n+1} = \xi_{c_k}^{n+6/7} \quad (k = N_v + 2, \dots, N_k) \quad (5.58)$$

исключаются невязки «основных» переменных $\xi_{c_k}^{n+1}$ и $\xi_{c_{k+1}}^{n+1}$. В результате для каждого сечения $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N_x$) получается следующая система линейных алгебраических уравнений относительно невязок интенсивностей излучения $\xi_{I_k}^{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, N_v$, имеющая трехдиагональную матрицу:

$$C_1 (\xi_{I_1}^{n+1})_i + D_1 (\xi_{I_2}^{n+1})_i = q_{I_1},$$

$$B_k (\xi_{I_{k-1}}^{n+1})_i + C_k (\xi_{I_k}^{n+1})_i + D_k (\xi_{I_{k+1}}^{n+1})_i = q_{I_k}, \quad (5.59)$$

$$k = 2, 3, \dots, N_v - 1,$$

$$B_{N_v} (\xi_{I_{N_v-1}}^{n+1})_i + C_{N_v} (\xi_{I_{N_v}}^{n+1})_i = q_{I_{N_v}}.$$

Здесь:

$$q_{I_k} = 1 - \sum_{j=1}^{N_y} A_j (\alpha_k)_{ij}^n - \sum_{j=1}^{N_y} A_j \left[(d_{k,k})_{ij}^n (\xi_{c_k})_{ij}^{n+6/7} + (d_{k,k+1})_{ij}^n (\xi_{c_{k+1}})_{ij}^{n+6/7} \right];$$

$$B_k = -\tau^n \sum_{j=1}^{N_y} A_j \left(\frac{d_{k,k}}{\rho} \frac{\alpha_{k-1}}{v_{k-1}} \right)_{ij}^n$$

$$C_k = \tau^n \sum_{j=1}^{N_y} A_j \left[\frac{\alpha_k}{\rho v_k} (d_{k,k} - d_{k,k+1}) \right]_{ij}^n;$$

$$D_k = \tau^n \sum_{j=1}^{N_y} A_j \left(\frac{d_{k,k+1}}{\rho} \frac{\alpha_{k+1}}{v_{k+1}} \right)_{ij}^n.$$

После решения (5.59) с помощью метода скалярной прогонки и определения $(\xi_{I_k}^{n+1})_i$ остальные неизвестные невязки $\xi_e^{n+1}, \xi_{c_k}^{n+1}$ ($k = 1, 2, \dots, N_v + 1$) определяются по явным формулам (5.54)–(5.57).

Напомним (см. п. 21.1), что в приведенных выше формулах все параметры оптических переходов между колебательными уровнями молекул $\text{HF}(v)$ рассчитываются для P -ветви этих переходов при значениях вращательного квантового числа $j_R^*(v, t, x) = j_R^{\max}(v, t, x)$, отвечающих максимальному для каждой колебательной полосы интегральному оптическому коэффициенту усиления (5.3). Поиск $j_R^{\max}(v, t, x)$, т. е. анализ j -сдвигов [487], осуществляется в начале каждого нового шага по времени (итерационного цикла — при решении стационарных задач) перед вычислением источниковых членов $(Q_R)_h^n$ (на этапе 1 описанного выше алгоритма). Если в сечении $x = x_i$ генерация в данной полосе $v + 1 \rightarrow v$ отсутствует, т. е. ни при каком j_R интегральный коэффициент усиления G_k^n не достигает порогового значения и $(I_k)_i^n = 0$, то $(\xi_{I_k})_i^{n+1}$ также должно быть равным нулю. Это требование выполняется, если в уравнениях (5.59) положить $C_k = 1, B_k = D_k = q_{I_k} = 0$.

3. По найденным значениям ξ^{n+1} и ξ_I^{n+1} в соответствии с двумя последними уравнениями системы (5.40) рассчитываются значения неизвестных функций на временном слое $n + 1$:

$$f_h^{n+1} = f_h^n + \xi^{n+1}, \quad (I_h)^{n+1} = (I_h)^n + \xi_I^{n+1}. \quad (5.60)$$

На этом расчет временного шага (итерации) заканчивается и вся описанная процедура повторяется, начиная с п. 1.

Окончание вычислений при решении нестационарных задач осуществляется по достижении заданного момента времени, а при решении стационарных задач методом установления — после выхода численного решения на стационарный режим. Критерием установления служит при этом выполнение условия

$$\max_{1 \leq h \leq N} \left\{ \frac{1}{\tau^n} \left| \frac{(f_k)_h^{n+1} - (f_k)_h^n}{(f_k)_h^n} \right| \right\} \leq \varepsilon;$$

$$\max_{1 \leq h \leq N_v} \left\{ \frac{1}{\tau^n} \left| \frac{(I_k)_h^{n+1} - (I_k)_h^n}{(I_k)_h^n} \right| \right\} \leq \varepsilon, \quad (5.61)$$

где ε — некоторая малая величина, значение которой выбирается таким образом, чтобы обеспечить требуемую точность искомого стационарного решения (при проведении конкретных расчетов обычно полагалось $\varepsilon = 10^{-4}$).

В заключение уместно подчеркнуть, что, как показали методические эксперименты, проводившиеся в процессе работы над схемой (5.40), введение в нее дробных шагов (5.40.7), обеспечивающих неявную аппроксимацию радиационных источников членов Q_R , является совершенно необходимым для обеспечения ее высокой устойчивости. Это объясняется резким изменением интенсивностей генерируемого излучения I_k во времени (в процессе итераций) и наличием сильных нелинейных связей между I_k и остальными параметрами течения.

Режим усиления. Для расчета течения в сверхзвуковом НФ-НХЛ, работающем в режиме усиления, и определения выходных энергетических характеристик усилителя в соответствии с постановкой задачи, приведенной в п. 21.2, необходимо проинтегрировать систему уравнений Навье — Стокса (5.24) и квазистационарное уравнение переноса излучения (5.14) с соответствующими граничными и начальными условиями (5.19) — (5.23).

Важной особенностью этой задачи, существенно отличающей ее от рассмотренной выше задачи о расчете параметров НХЛ, работающего в режиме генерации, является то обстоятельство, что, в силу принятых при ее постановке допущений, относительные изменения интенсивностей излучения $I_k(t, x, y)$ не могут быть велики (напомним, что рассматривается работа усилителя в режиме насыщения). Поэтому при построении конечно-разностной схемы в данном случае не возникает необходимости в неявной аппроксимации радиационных источников членов Q_R в системе (5.24). Более того, использование неявной аппроксимации указанных членов является при этом нецелесообразным, так как приводит к неоправданному усложнению алгоритма. С другой стороны, отсутствие в уравнениях переноса излучения (5.14) производных по времени (их квазистационарность) позволяет при заданных полях $f(t, x, y)$ определить пространственные распределения $I_k(t, x, y)$ путем независимого интегрирования этих уравнений.

С учетом этих двух обстоятельств для численного решения рассматриваемой задачи можно воспользоваться конечно-разностной схемой расчета течения в НХЛ, работающем в режиме генерации (5.40), с той только разницей, что из этой схемы следует исключить дробный шаг (5.40.7). При этом алгоритм решения задачи о расчете течения в лазерной полости усилителя сводится к следующему.

1. В результате численного интегрирования уравнения переноса излучения (5.14) с граничными условиями (5.22) при известных значениях газодинамических и термодинамических параметров потока $f_k(t^n, x, y)$ определяются интенсивности излучения отдельных

колебательных полос $I_k(t^n, x, y)$. Для этого используется не дифференциальная, а интегральная форма уравнения (5.14), которая, согласно [492], имеет вид

$$I_k(t, x, y) = I_k(t, x, 0) \exp \left(A \int_0^y \alpha_k(t, x, y) dy \right) \quad (5.62)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_v).$$

Используя для вычисления интеграла в (5.62) формулу трапеций, получим следующее рекуррентное соотношение для расчета поперечных распределений интенсивностей излучения I_k в лазерной полости на n -м временном слое (итерации):

$$(I_k)_{i,j+1}^n = (I_k)_{i,j}^n \exp \left[A (\alpha_k)_{i,j+\frac{1}{2}}^n h_y \right] \quad (j=1, 2, \dots, N_y-1), \quad (5.63)$$

$$(I_k)_{i,1}^n = I_k^-(x_i) \quad (k = 1, 2, \dots, N_v; \quad i = 1, 2, \dots, N_x).$$

2. С использованием найденных значений $I_k(t^n, x, y)$ рассчитываются радиационные источниковые члены Q_{Rh}^n в правой части (5.40.1), после чего выполняются дробные шаги (5.40.1) — (5.40.6), реализация которых рассмотрена в предыдущем разделе. В результате определяется поле вектора невязок основных переменных ξ^{n+1} .

3. По известным значениям ξ^{n+1} рассчитываются поля основных переменных f_h^{n+1} на новом временном слое (новой итерации) (5.40.8), после чего описанная процедура повторяется, начиная с п. 1.

22.3. Оценка адекватности используемой математической модели и эффективности вычислительного алгоритма. Описанная в § 21 модель процессов в полости резонаторов сверхзвуковых НХЛ основана на использовании полной системы уравнений Навье — Стокса (5.7) — (5.13), что должно, вообще говоря, обеспечивать адекватность описания газодинамики течения в полости резонатора. Однако при построении этой модели используется ряд допущений относительно характера протекания радиационных процессов, справедливость которых нуждается в экспериментальном подтверждении.

Одно из наиболее полных экспериментальных исследований характеристик НХЛ проведено в работах Вильсона [494] и Вильсона, Хука [495]. В этих экспериментах использовался сверхзвуковой химический лазер на молекулах фтористого дейтерия (DF-НХЛ), фрагмент соплового блока которого изображен на рис. 5.5. Известно (см., например, [496—500]), что на характеристики течения в сопловых блоках НХЛ значительное влияние оказывают вязкие эффекты и процессы тепломассообмена на интенсивно охлаждаемых стенках сопловых лопаток. Вследствие этого параметры потока на выходе из сопловых блоков оказываются сильно неоднородными, что, в свою очередь, существенно сказывается на выходных энергетических характеристиках НХЛ [140, 501, 502]. Поэтому для получения реалистичных оценок характеристик НХЛ параметры потока на выходе из соплового блока, задаваемые в качестве граничных

условий (5.19) на входе в полость резонатора, также должны быть определены достаточно точно. Поскольку в опытах [494, 495] эти параметры не измерялись, перед расчетом течения в полости резонатора лазера [494] был предварительно выполнен расчет течения

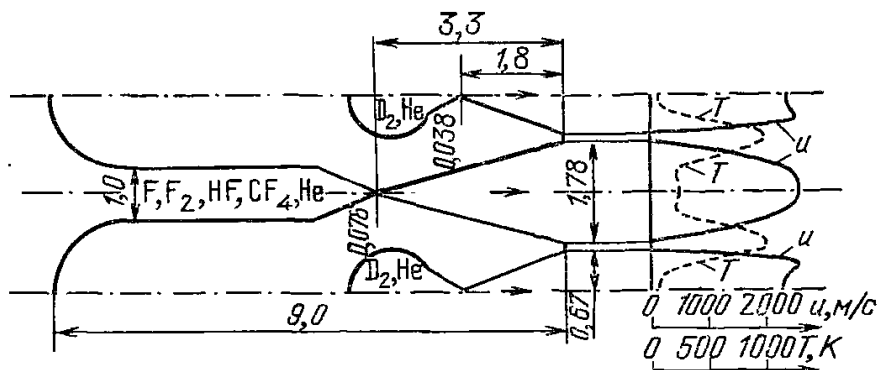


Рис. 5.5. Схема соплового блока, использовавшегося в экспериментах [494, 495] (размеры указаны в мм), и профили температуры и скорости потока на выходе из сопел

в соплах горючего и окислителя соплового блока, изображенного на рис. 5.5. Для описания этого течения использовались уравнения ламинарного многокомпонентного пограничного слоя (см. п. 6.3.1), численное интегрирование которых осуществлялось с помощью конечно-разностного метода, описанного в работах [496—498] (там же приведены детали постановки задачи о расчете течений в соплах НХЛ в рамках приближения пограничного слоя). Полученные в результате профили параметров потока на выходе из сопел горючего и окислителя (см. рис. 5.5) задавались в качестве граничных условий (5.19) при расчете течения в полости резонатора.

Сопоставление расчетной зависимости удельного энергосъема E_z (мощности излучения на единицу расхода горючего и окислителя) от величины мольного расхода окислителя через единицу площади поперечного сечения соплового блока $\dot{N}_F$, полученной в рамках модели, описанной в § 21, с экспериментальными данными [494, 495] проведено на рис. 5.6. В процессе экспериментов величина $\dot{N}_F$ изменялась путем изменения давления торможения окислительного газа. Поэтому наряду с $\dot{N}_F$ одновременно изменялось и давление на срезе окислительных сопел, а следовательно, и степень нерасчетности струй горючего и окислителя N (отношение давлений на срезах сопел горючего и окислителя), от которой существенно зависит структура течения в полости резонатора [140].

При проведении расчетов предполагалось, что смесь в полости резонатора содержит 14 компонент (F , F_2 , D , D_2 , He , $DF(v)$ ($v = 0 - 6$), HF , CF_4), взаимодействие которых описывается кинетической моделью, включающей 80 элементарных физико-химических процессов (химических реакций, процессов $v-v$ - и $v-T$ -обмена [273]).

Как видно из рис. 5.6, во всем исследовавшемся в опытах [494, 495] диапазоне изменения режимных параметров расчетные и экспериментальные данные по E_z различаются не более чем на 20 %. Это свидетельствует о том, что по крайней мере при расчете энергетических характеристик лазеров рассматриваемого типа использование допущений, сформулированных в п. 21.1, является вполне оправданным.

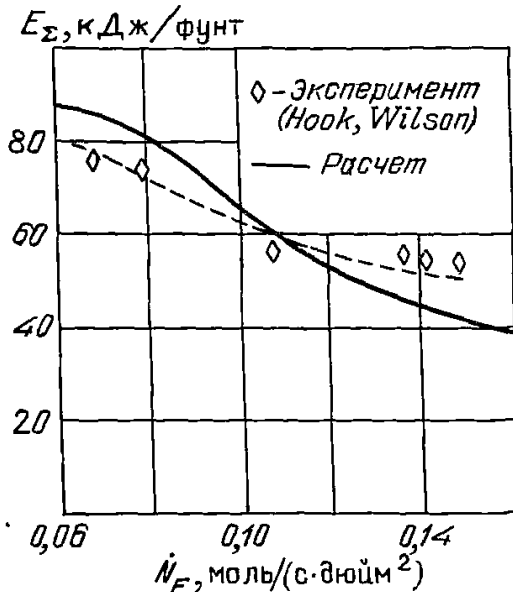


Рис. 5.6. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными [494, 495]

Что касается эффективности описанного в п. 22.2 конечно-разностного алгоритма, то о ней можно судить по рис. 5.7, на котором представлена зависимость числа итераций, необходимого для получения стационарного решения рассмотренной выше задачи, от числа Куранта.

При проведении расчетов поля искомых функций, используемые в качестве начального приближения при отыскании стационарного решения («начальные» условия (5.23)), совпадали с профилями параметров на входе в полость резонатора (на выходе из соплового блока — рис. 5.5). Предварительные численные эксперименты показали, что при этом на начальной стадии решения для согласования полей параметров потока, заданных по существу произвольно, необходимо использовать относительно небольшие значения τ^n . Поэтому значение итерационного параметра изменялась в процессе расчета по следующему закону:

$$\tau^n = \begin{cases} \tau_{\min} & \text{при } n \leq n_{\min}, \\ \tau_{\min} + (\tau_{\max} - \tau_{\min})(n - n_{\min}) / (n_{\max} - n_{\min}) & \text{при } n_{\max} < n < n_{\min}, \\ \tau_{\max} & \text{при } n > n_{\max}, \end{cases}$$

причем во всех случаях $\tau_{\min} = 0,5 h_x$, $n_{\min} = 10$, $n_{\max} = 50$.

Анализ результатов, представленных на рис. 5.7, свидетельствует о том, что при удачном выборе $\tau_{\max}$ конечно-разностная схема (5.40) обеспечивает весьма высокую скорость сходимости итераций.

Важно также отметить, что в области оптимальных с точки зрения скорости сходимости итераций значений параметра $\tau_{\max}$ (числа Куранта) зависимость $N(\text{Cиг})$ является относительно слабой.

Кроме того, как показал опыт использования схемы (5.40), оптимальное значение числа Куранта слабо зависит от рассматриваемых условий течения (геометрических и режимных параметров НХЛ). Указанные обстоятельства позволяют использовать одни и

те же значения числа Куранта при проведении расчетов самых разнообразных режимов работы НХЛ без дополнительного «экспериментального» уточнения оптимальных значений этого параметра, что является крайне важным при проведении широких численных исследований.

Напомним, наконец, что схема (5.40) реализуется с помощью скалярных прогонок и расчетов по явным формулам (см. п. 22.2), т. е. объем вычислений, необходимых для выполнения одной итерации (шага по времени) при использовании этой схемы, относительно невелик даже при расчете течений смесей с большим числом компонент. Все это свидетельствует о высокой экономичности схемы (5.40) и подтверждает тем самым плодотворность использования принципа расщепления по координатам и физическим процессам [31] при построении конечно-разностных методов решения широкого круга задач физико-химической газовой динамики.

В настоящее время с использованием схемы (5.40) выполнен достаточно большой объем численных параметрических исследова-

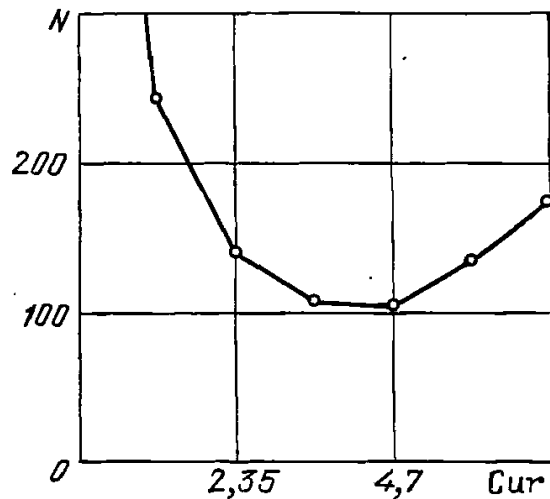


Рис. 5.7. Зависимость числа итераций, необходимого для получения стационарного решения, от числа Куранта $Cur = \frac{\tau_{\max} u_{\max}}{h_x}$

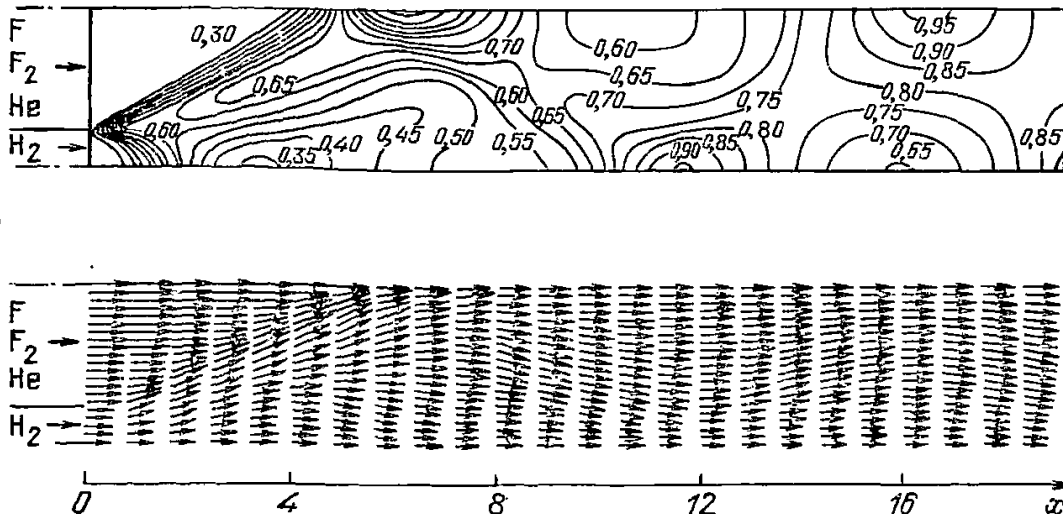


Рис. 5.8. Поле вектора скорости и изолинии безразмерного давления в полости резонатора при нерасчетном режиме истечения струй реагентов для $N = 4$

ний процессов, протекающих в резонаторах сверхзвуковых НХЛ, в результате чего удалось решить ряд вопросов как методического, так и практического характера. В частности, в работах [139—141]

проведен анализ влияния на характеристики НХЛ параметра нерасчетности струй реагентов N при ламинарных [140, 141] и турбулентных [139] режимах течения (в качестве примера на рис. 5.8 изображены поля вектора скорости и давления в полости резонатора при $N = 4$, полученные в [141]). Проведенные в [140] расчеты характеристик НФ-НХЛ радиального расширения при различных

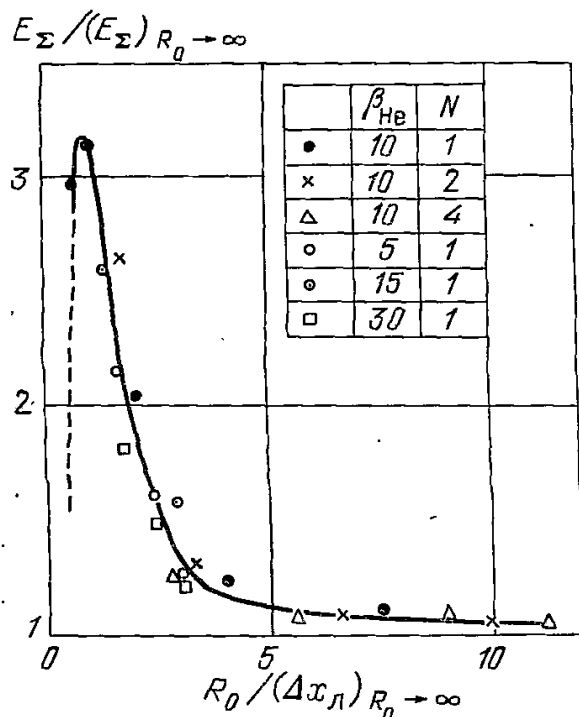


Рис. 5.9. Обобщенная зависимость удельного энергозатрата НФ-НХЛ цилиндрической конструкции от радиуса соплового блока

значениях радиуса соплового блока, степени нерасчетности струй горючего и окислителя и степени разбавления окислителя гелием показали, что зависимость удельного энергозатрата лазера с цилиндрическим сопловым блоком от указанных параметров может быть приближенно описана единой кривой, если по оси абсцисс отложить радиус соплового блока, отнесенный к длине зоны генерации в аналогичном НХЛ с плоскими соплами, а по оси ординат — отношение удельных энергозатрат этих лазеров (см. рис. 5.9). Этот факт открывает возможность для оперативной оценки энергетических характеристик НФ-НХЛ радиального расширения в широком диапазоне изменения определяющих параметров ($R_0, N, \beta_{\text{He}}$) по известным значениям удельно-

го энергозатрата и длины зоны генерации для аналогичной плоской модели НХЛ. В этой же работе исследована чувствительность результатов расчетов выходных энергетических характеристик лазера к используемому способу задания граничных условий на входе в полость резонатора, а в [142] проведены расчеты, результаты которых свидетельствуют о том, что для описания процессов многокомпонентной диффузии в НФ-НХЛ практически без снижения точности может использоваться приближенная формула Уилки (1.46). Наконец, благодаря высокой экономичности схемы (5.40) с ее помощью удалось провести широкие численные исследования, направленные на определение границ применимости приближения узкого канала для описания процессов в резонаторах НФ-НХЛ. Результаты этих исследований подробно рассмотрены в следующем параграфе.

§ 23. Границы применимости приближения узкого канала для анализа процессов в резонаторах сверхзвуковых НХЛ

Как уже отмечалось в начале данной главы, в настоящее время приближение узкого канала (см. п. 6.3.2) достаточно широко используется для численного моделирования процессов в сверхзвуковых НХЛ. В рамках этого приближения выполнен, в частности, большой объем численных параметрических исследований процессов в HF-НХЛ с плоскими, цилиндрическими и другими типами сопловых блоков [489, 501—508]. Наряду с этим данная модель применяется также для анализа особенностей непрерывных химических лазеров на отличных от фтористого водорода рабочих молекулах (DF-НХЛ [509], DF — CO₂-НХЛ [510]). Такая популярность приближения узкого канала обусловлена, с одной стороны, возможностью достаточно полного описания в рамках этой модели многих важных для НХЛ газодинамических эффектов, а с другой стороны — относительной простотой ее численной реализации и экономичностью, благодаря которым удается проводить широкие численные исследования с учетом большого числа физико-химических процессов, протекающих в резонаторах НХЛ. Вместе с тем нельзя забывать, что даже в случае расчетного режима истечения струй реагентов из соплового блока правомерность использования приближения узкого канала для описания течения в полости резонатора является далеко не очевидной (см. § 20) и может быть установлена лишь путем систематического сопоставления результатов расчетов, полученных в рамках этого приближения и на основе полных уравнений Навье — Стокса в широком диапазоне изменения параметров, определяющих так называемую «естественную» нерасчетность течения, т. е. значение поперечных градиентов давления, возникающих в ограниченном сверхзвуковом потоке в полости резонатора вследствие интенсивного локального тепловыделения в зоне протекания экзотермических химических реакций. Рассмотрим некоторые результаты такого сопоставления, которые частично опубликованы в [138, 140, 141], а частично публикуются впервые.

23.1. Ламинарный режим течения в полости резонатора. Данный режим реализуется при обычных для HF-НХЛ низких значениях давления в полости резонатора (порядка 5 — 7 торр и ниже [511]) и является наиболее характерным для таких лазеров. Для оценки границ применимости при этих условиях приближения узкого канала была выполнена серия расчетов, в которой варьировались степень разбавления струи окислителя гелием $\beta_{\text{He}} = \dot{n}_{\text{He}} / (\frac{1}{2}\dot{n}_{\text{F}} + \dot{n}_{\text{F}_2})$ ($\dot{n}$ — мольный расход газа) и радиус соплового блока R_0 (в случае НХЛ цилиндрической конструкции — рис. 5.2), так как именно от значений этих параметров зависит интенсивность нагрева смеси в результате протекания реакций накачки, а следовательно, и зна-

чение поперечных градиентов давления, возникающих в полости резонатора при расчетном истечении в нее струй реагентов.

Параметры струй окислителя и горючего на входе в полость резонатора и характеристики типичной оптической системы HF-NХЛ

Таблица 5.1

Параметр (см. рис. 5.1, 5.3)	Обозначение	Значение
Полувысота струи горючего (H_2)	L_1	$5 \cdot 10^{-4}$ м
Полувысота струи окислителя ($F + F_2 + He$)	L_2	$2 \cdot 10^{-3}$ м
Скорость истечения горючего	u_1	2410 м/с
Температура горючего	T_1	100 К
Статическое давление в струе горючего	p_1	1760 Па
Статическое давление в струе окислителя	p_2	760 Па
Длина оптического пути	L_{opt}	0,175 м
Коэффициент поглощения зеркал резонатора	a_1	0,02
	a_2	0,02
Коэффициенты отражения зеркал резонатора	r_1	0,98
	r_2	0,85

[488], использовавшиеся при проведении расчетов, приведены в табл. 5.1. Скорость, температура и состав смеси на срезе окислительного сопла при различных значениях β_{He} определялись из расчета одномерного невязкого замороженного течения смеси частично

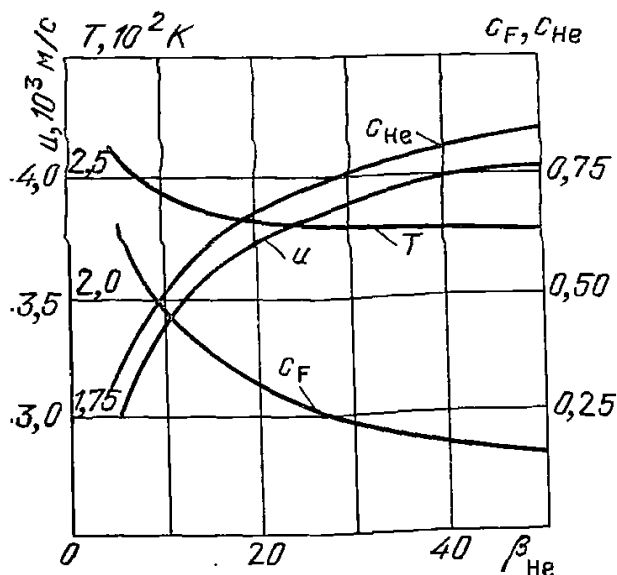


Рис. 5.10. Зависимость параметров потока окислителя на срезе сопел (на входе в резонатор) от степени разбавления фтора гелием

диссоциированного фтора с гелием, имеющей температуру торможения 2000 К, в сопле со степенью расширения 10 (см. рис. 5.10).

Расчет течения в полости резонатора в рамках приближения узкого канала проводился по методике, разработанной В. А. Поспеловым [230], а на основе полной системы уравнений Навье — Стокса — с помощью методики, описанной в п. 22.2. И в том, и в другом случае для описания кинетики взаимодействия водорода со фтором использовалась кинетическая модель [273].

Основные результаты расчетов течения в полости резонаторов НХЛ с плоским сопловым блоком при отсутствии излучения (режим усиления слабого сигнала) приведены на рис. 5.11—5.16.

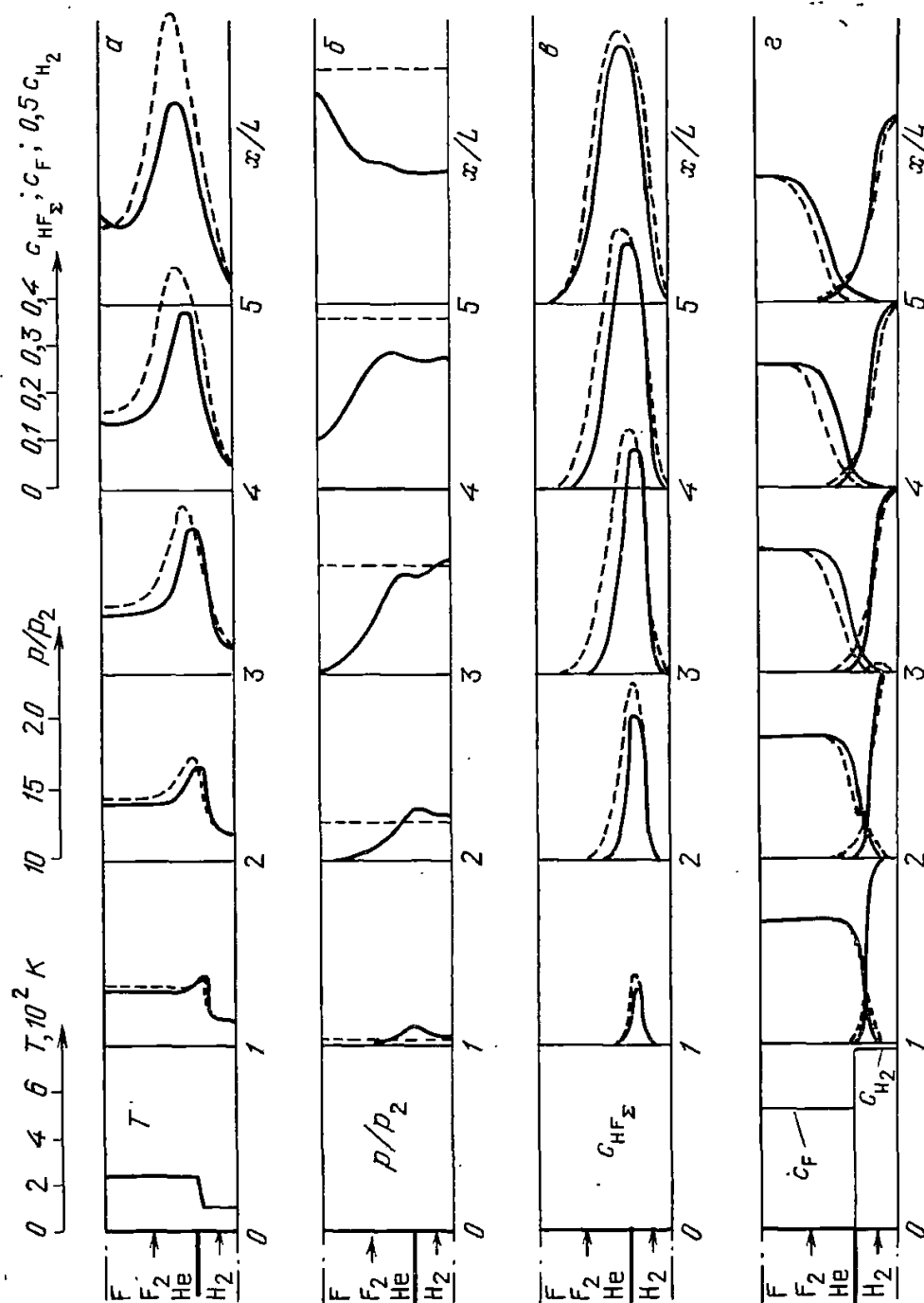


Рис. 5.11. Профили температуры (а), давления (б), суммарной концентрации молекул HF (в) и концентрации F и H₂ (г) в различных сечениях потока при $\beta_{He} = 5$; сплошная линия — расчет на основе уравнений Навье — Стокса, штриховая — в приближении узкого канала

При малом содержании гелия в струе окислителя ($\beta_{\text{He}} = 5$) на начальном участке течения ($x/L \leq 2$) в узкой зоне смешения реагентов наблюдается резкий рост давления (рис. 5.11, б), обусловленный разогревом смеси (рис. 5.11, а) вследствие протекания в этой

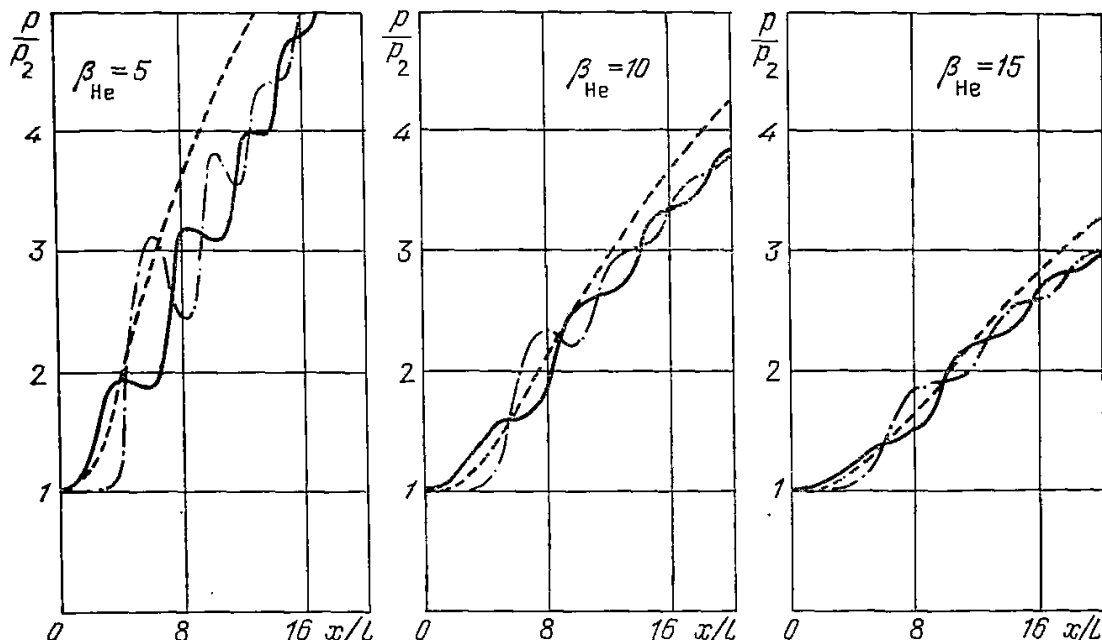


Рис. 5.12. Распределение давления вдоль плоскостей симметрии струй реагентов. Сплошная линия — $y = 0$ (ось горючего), штрихпунктирная — $y = 1$ (ось окислителя), штриховая — расчет в приближении узкого канала

области экзотермических реакций. Образующиеся при этом поперечные градиенты давления приводят к возникновению поперечных токов, направленных к плоскостям симметрии струй, что в свою очередь влечет за собой перераспределение давления в потоке.

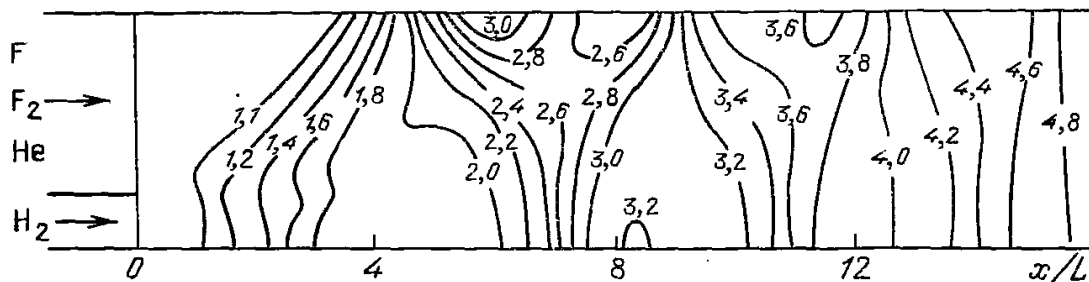


Рис. 5.13. Изолинии безразмерного давления p/p_2 при $\beta_{\text{He}} = 5$

Следует подчеркнуть, что величина поперечных градиентов давления, возникающих в потоке при $\beta_{\text{He}} = 5$, весьма значительна, и картина течения в полости резонатора оказывается в этом случае качественно аналогичной картине, имеющей место при нерасчетном режиме истечения струй (это наглядно иллюстрируют рис. 5.12, 5.13). Естественно, что использование при этих условиях приближения узкого канала, основанного на допущении об отсутствии в по-

токе поперечных градиентов давления, приводит к значительным погрешностям в расчете не только локальных характеристик потока (полей давления, температуры, концентраций компонент — см. рис. 5.11—5.13), но и таких интегральных параметров, как среднерасходная температура смеси и среднерасходные концентрации отдельных ее компонент (см. рис. 5.14), а также среднеинтегральные оптические коэффициенты усиления отдельных колебательных полос

$$\tilde{\alpha}_{v,v+1} = \frac{1}{L} \max_{j_R} \int_0^L \alpha_{v,j_R}(x, y) dy,$$

продольные распределения которых представлены на рис. 5.15.

С увеличением содержания в потоке окислителя инертного разбавителя (с ростом β_{He}) погрешности, вносимые в расчет в результате использования приближения узкого канала, быстро уменьшаются. Так, уже при $\beta_{\text{He}} = 15$ неравномерность в распределении давления поперек расчетной области снижается до 20 % (см. рис.

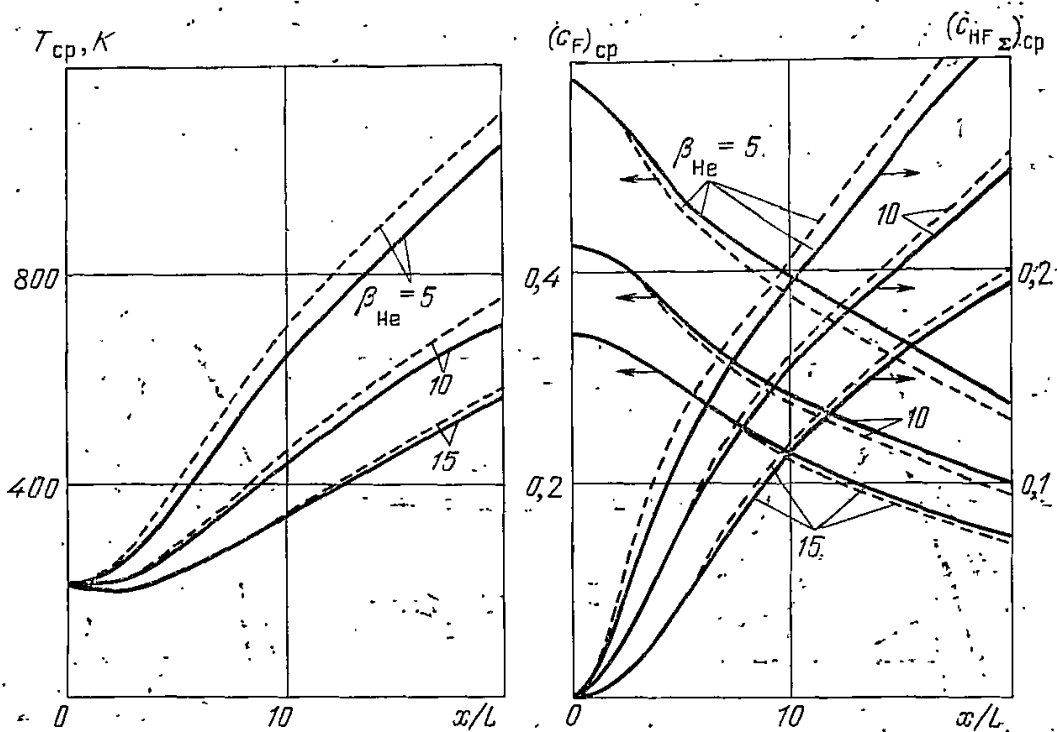


Рис. 5.14. Продольные распределения среднерасходных значений температуры смеси, концентрации атомарного фтора и молекул HF_2 . Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

5.12), а погрешность в определении коэффициента усиления слабого сигнала в случае его расчета в рамках приближения узкого канала составляет лишь 10 % (см. рис. 5.15). Такой же порядок имеет при $\beta_{\text{He}} = 15$ погрешность в расчете локальных термодинамических параметров потока в резонаторе (рис. 5.16).

Приведенные результаты позволяют констатировать, что использование приближения узкого канала для расчета газодинамических, термодинамических и оптических характеристик потока в полости резонатора НФ-НХЛ с плоским сопловым блоком при

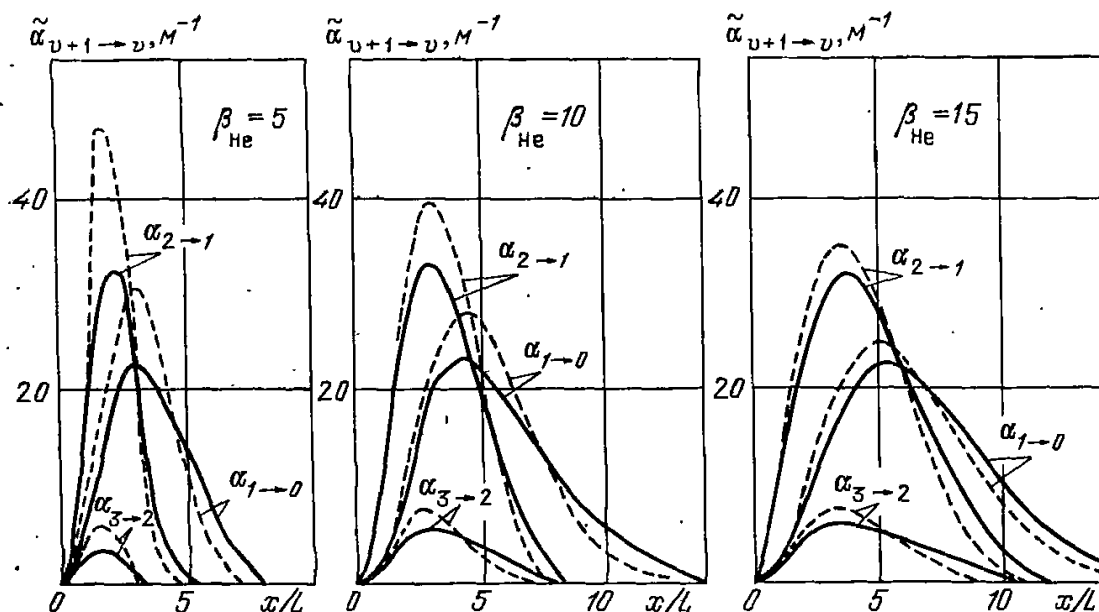


Рис. 5.15. Продольные распределения среднеинтегральных коэффициентов усиления отдельных колебательных полос. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

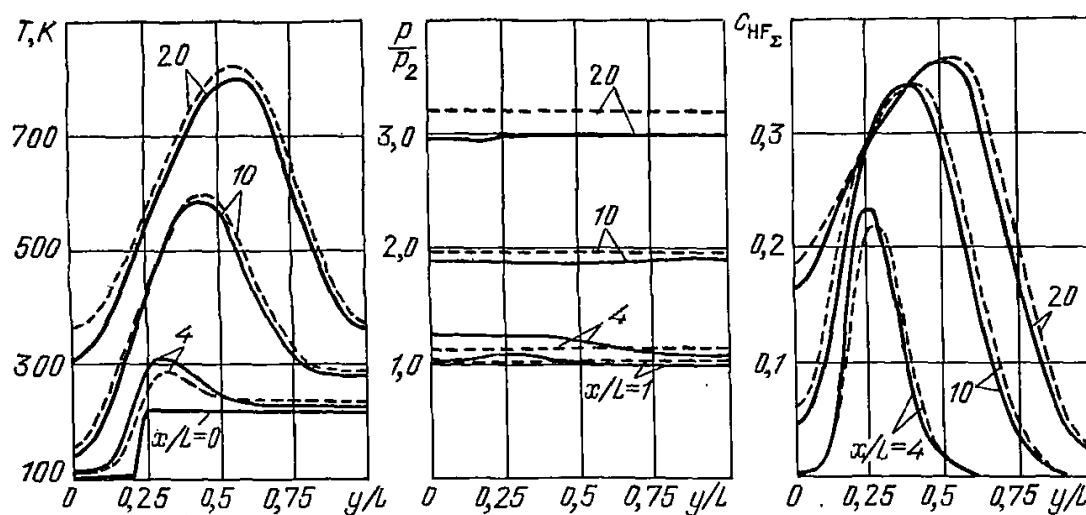


Рис. 5.16. Профили температуры, безразмерного давления и суммарной концентрации молекул НФ в различных сечениях потока. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

расчетном режиме истечения струй реагентов является оправданным при $\beta_{\text{He}} \geq 15$.

Качественно аналогичные выводы о влиянии β_{He} на погрешности, обусловленные использованием приближения узкого канала, получены и при расчете течения в полости резонатора НФ-НХЛ с

цилиндрической конструкцией соплового блока (см. рис. 5.17—5.19). Однако в этом случае указанные погрешности зависят не только от β_{He} , но и от R_0 , значение которого определяет интенсивность расширения сверхзвукового потока в полости резонатора (с уменьшением R_0 степень расширения линейно увеличивается). В результате

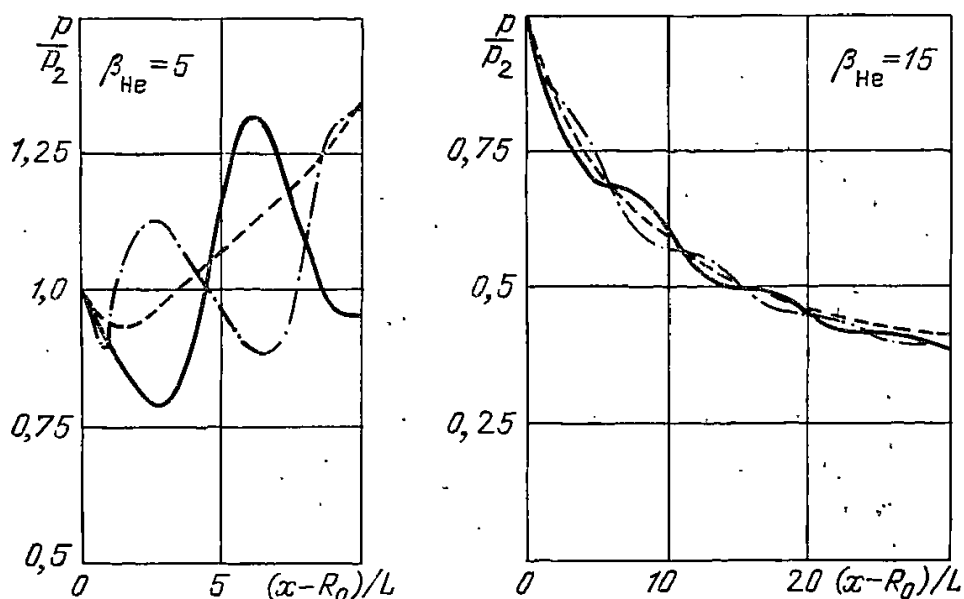


Рис. 5.17. Продольные распределения давления в плоскостях симметрии струй реагентов, истекающих из цилиндрического соплового блока с радиусом $R_0 = 4$ см. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.12.

темп роста среднего уровня температуры и давления вниз по потоку снижается по сравнению со случаем $R_0 \rightarrow \infty$ (плоский сопловой блок), а при малых R_0 температура и давление на начальном участке течения даже падают (см. рис. 5.20, 5.21). Вследствие этого

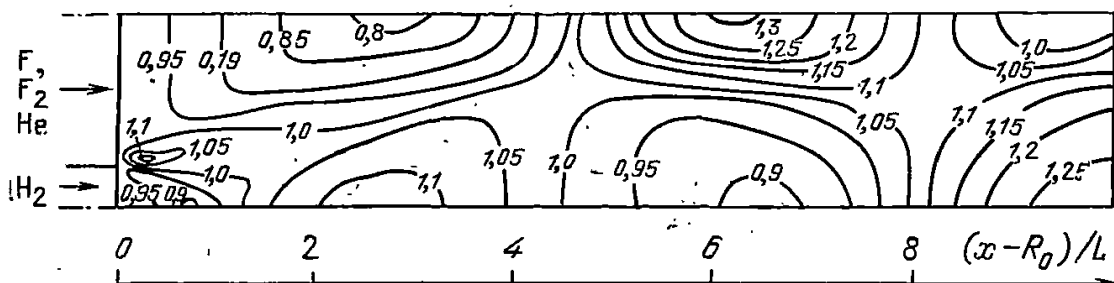


Рис. 5.18. Изолинии безразмерного давления p/p_2 для течения в системе радиальных струй реагентов при $\beta_{\text{He}} = 5$, $R_0 = 4$ см

с уменьшением R_0 падает интегральная скорость протекания реакций накачки (см. кривые выгорания атомарного фтора, изображенные на рис. 5.22), уменьшается интенсивность тепловыделения и сглаживаются поперечные градиенты давления в потоке (рис. 5.21). Поэтому с уменьшением R_0 погрешности, возникающие при определении параметров рассматриваемого течения на основе приближения узкого канала, уменьшаются (рис. 5.20, 5.21).

Таким образом, границы применимости приближения узкого канала по величине β_{He} при анализе процессов в резонаторах НХЛ с цилиндрическими сопловыми блоками расширяются с уменьше-

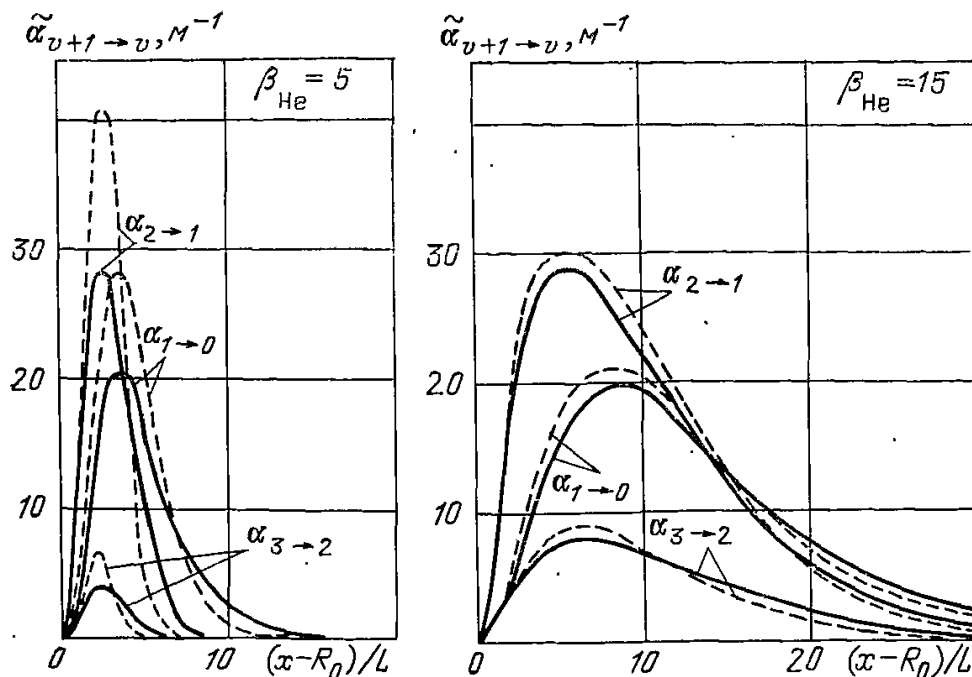


Рис. 5.19. Продольные распределения среднеинтегральных коэффициентов усиления отдельных колебательных полос для течения в системе радиальных струй реагентов при $R_0 = 4$ см. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

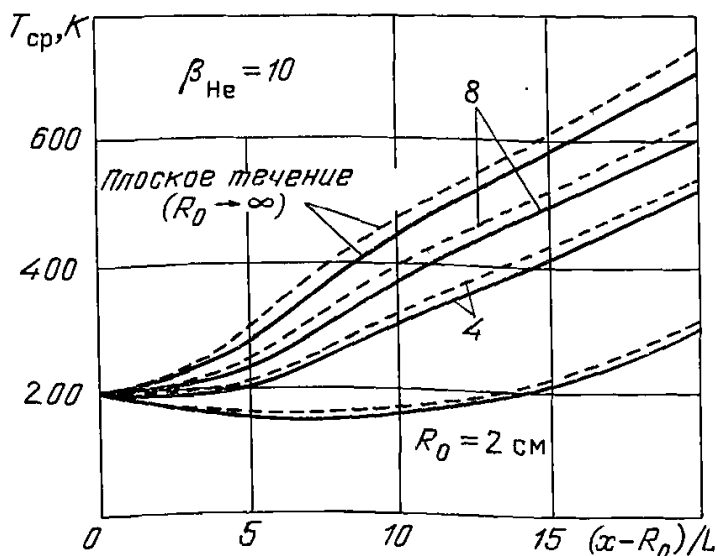


Рис. 5.20. Влияние радиуса соплового блока на продольное распределение среднерасходной температуры смеси. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

нием R_0 , и для минимального из рассмотренных значений $R_0 = 2$ см погрешности, обусловленные использованием этого приближения, становятся несущественными уже при $\beta_{\text{He}} \geq 10$.

Наиболее важным в практическом отношении является вопрос о погрешностях, которые вносит использование приближения уз-

кого канала в расчет выходных энергетических характеристик НГ-НХЛ, работающих в режиме генерации.

Как видно из рис. 5.23 — 5.25, характер и степень различий в продольных распределениях интенсивности генерируемого излучения, определенные в рамках полных уравнений Навье — Стокса и на основе приближения узкого канала при различных β_{He} и R_0 ,

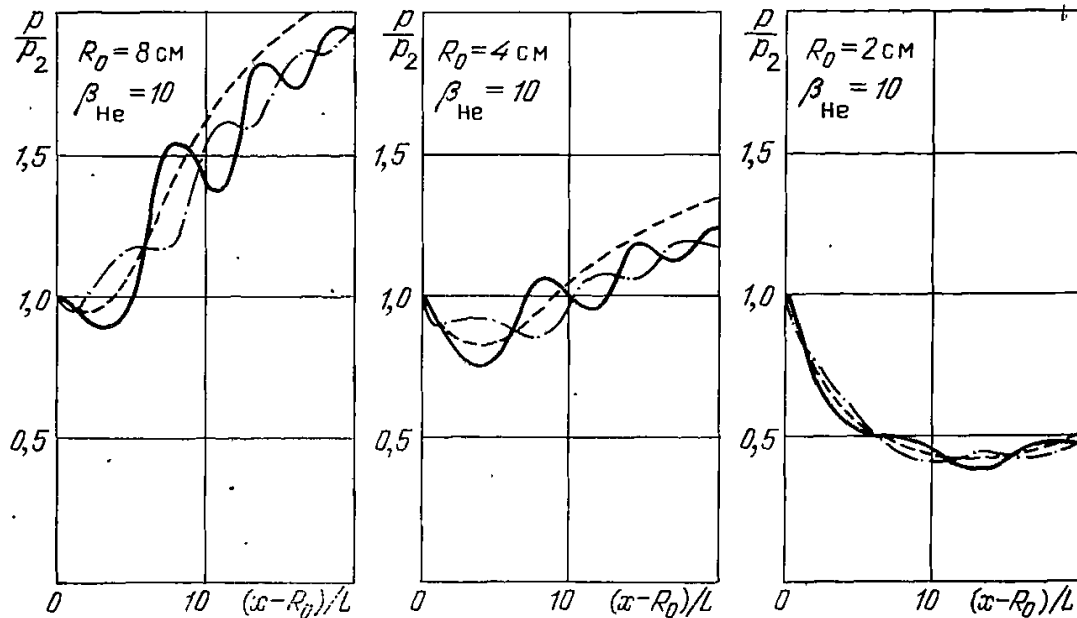


Рис. 5.21. Влияние радиуса соплового блока на продольное распределение давления в плоскостях симметрии струй реагентов. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.12

оказываются такими же, как и при расчете продольных распределений оптических коэффициентов усиления слабого сигнала (см. рис. 5.15, 5.19), что представляется вполне закономерным. Однако погрешности в расчете интегральных энергетических характеристик лазера (мощности излучения, удельного энергосъема, химического к. п. д. [274]), связанные с использованием приближения узкого канала, оказываются при этом гораздо меньшими, чем при расчете локальных значений интенсивности генерируемого лазером излучения. Данное обстоятельство объясняется тем, что завышение максимального значения интенсивности излучения, имеющее место при использовании приближения узкого канала, в значительной степени компенсируется при расчете интегральных характеристик за счет занижения в этом случае длины зоны генерации (см. рис. 5.23 — 5.25). В результате во всем рассмотренном диапазоне изменения степени разбавления окислителя гелием и радиуса соплового блока, т. е. при $\beta_{\text{He}} \geq 5$ и $R_0 \geq 2$ см (меньшие значения этих параметров не представляют практического интереса [274]), погрешность в определении удельного энергосъема лазера E_z , обусловленная использованием приближения узкого канала, не превышает 10 % (см. рис. 5.26, 5.27).

Таким образом, при определении интегральных энергетических характеристик НФ-НХЛ в случае расчетного истечения струй реагентов и ламинарного режима течения в полости резонатора приближение узкого канала является, по-видимому, оптимальной моделью, так как обеспечивает вполне приемлемую точность расчета

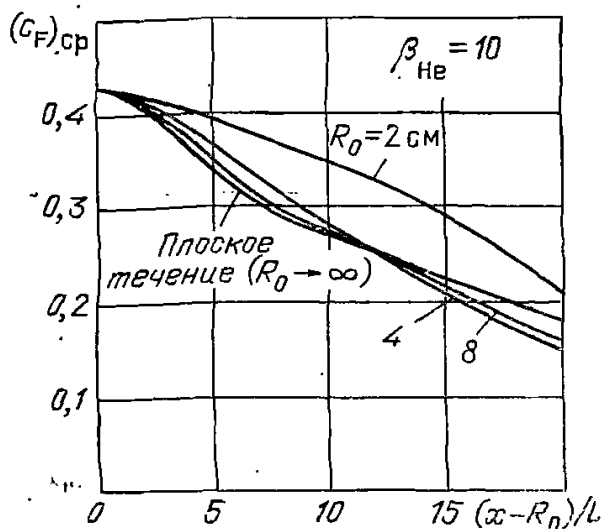


Рис. 5.22. Влияние радиуса соплового блока на продольное распределение среднерасходной концентрации атомарного фтора (расчет на основе полной системы уравнений Навье — Стокса)

и обладает высокой экономичностью (позволяет более чем на порядок сократить затраты машинного времени по сравнению со случаем, когда расчет ведется на основе полной системы уравнений Навье — Стокса).

23.2. Турбулентный режим течения в полости резонатора. Согласно имеющимся в литературе экспериментальным данным [511] переход к турбулентному режиму течения в полости резонаторов НФ-НХЛ происходит при сравнительно высоких статических давлениях в потоках горючего и окислителя на входе в резонатор (порядка 3–4 кПа). Интерес к изучению таких режимов работы НФ-НХЛ

связан с тем, что повышение статического давления в полости резонатора значительно облегчает решение задачи эвакуации продуктов выхлопа НХЛ при нормальных условиях в окружающей среде.

К сожалению, современные методы расчета турбулентных сверхзвуковых течений многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей весьма далеки от совершенства и не обеспечивают адекватного описания всей совокупности сложных газодинамических и физико-химических процессов, характерных для таких течений (см. гл. 3). Это замечание в полной мере относится и к предложенной в работе [139] методике расчета турбулентных течений в полости резонаторов НХЛ на основе системы уравнений Рейнольдса в сочетании с $(k - \epsilon)$ -моделью турбулентности, которая представляет собой непосредственное обобщение на данный случай описанной в п. 22.2 методики расчета ламинарных режимов течения. Тем не менее можно надеяться, что величина различий результатов расчетов, полученных с помощью этой методики и в рамках приближения узкого канала (также в сочетании с $(k - \epsilon)$ -моделью турбулентности), может служить более или менее объективным критерием применимости последнего для анализа турбулентных режимов течения в полости резонаторов НФ-НХЛ, что уже само по

себе является весьма важным для правильной постановки дальнейших исследований.

Для оценки указанных различий была выполнена серия расчетов, аналогичных описанным выше расчетам ламинарных течений в НХЛ с плоским сопловым блоком при расчетном режиме истече-

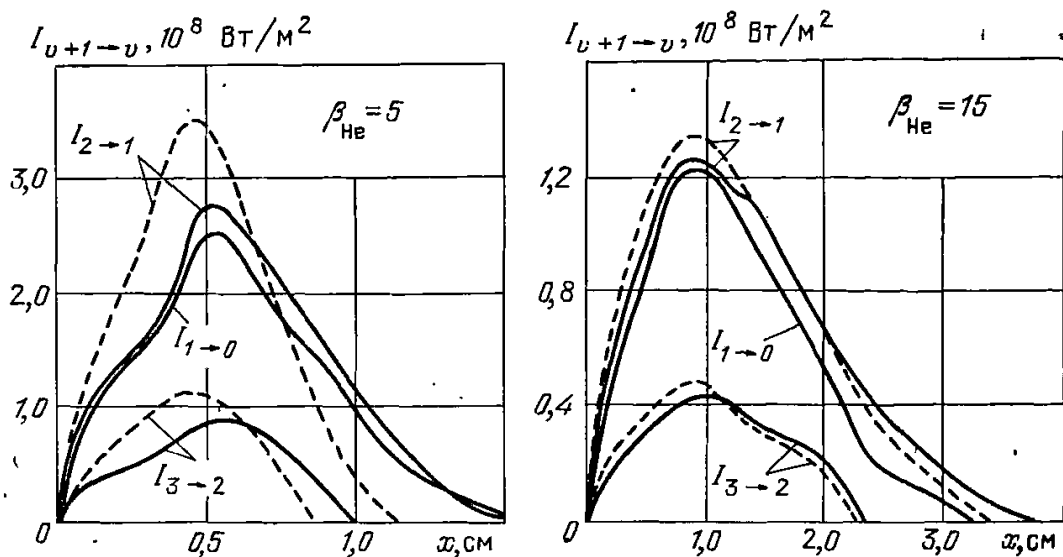


Рис. 5.23. Распределение интенсивности излучения отдельных колебательных полос вдоль зоны генерации для НХЛ с плоским сопловым блоком. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

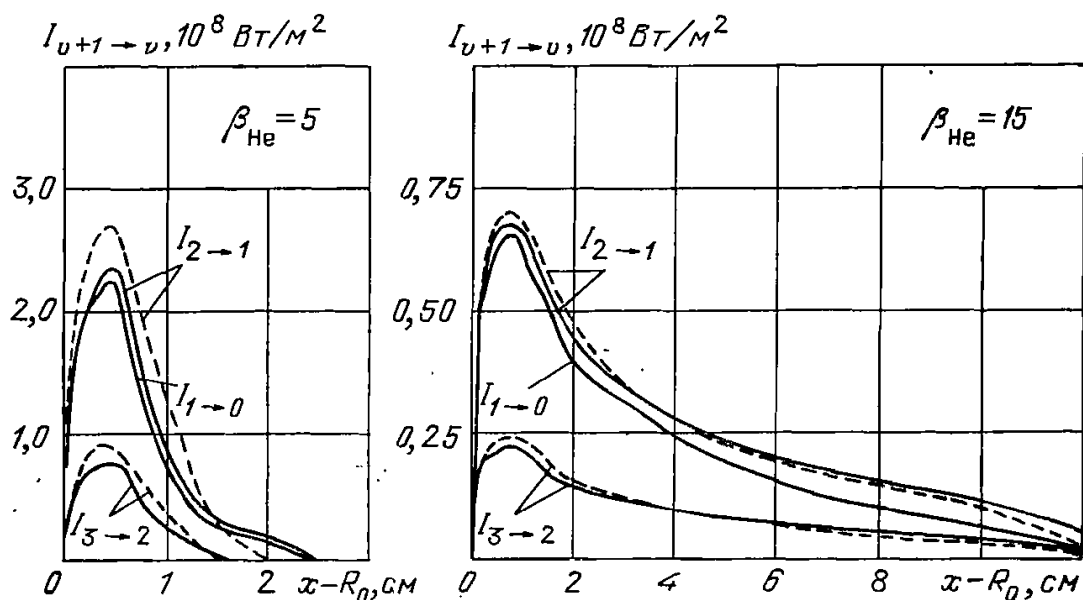


Рис. 5.24. Распределение интенсивности излучения отдельных колебательных полос вдоль зоны генерации для НХЛ с цилиндрическим сопловым блоком при $R_0 = 4$ см. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

ния струй горючего и окислителя в полость резонатора лазера. Различие состояло лишь в том, что наряду со степенью разбавления окислителя гелием в данном случае при проведении расчетов

варьировалась также степень турбулентности на входе в резонатор. Очевидно, что она может существенно влиять на скорость смешения реагентов, от которой зависит интенсивность протекания реакций накачки, а следовательно, и интенсивность тепловыделения в потоке. Таким образом, степень турбулентности потока на входе в

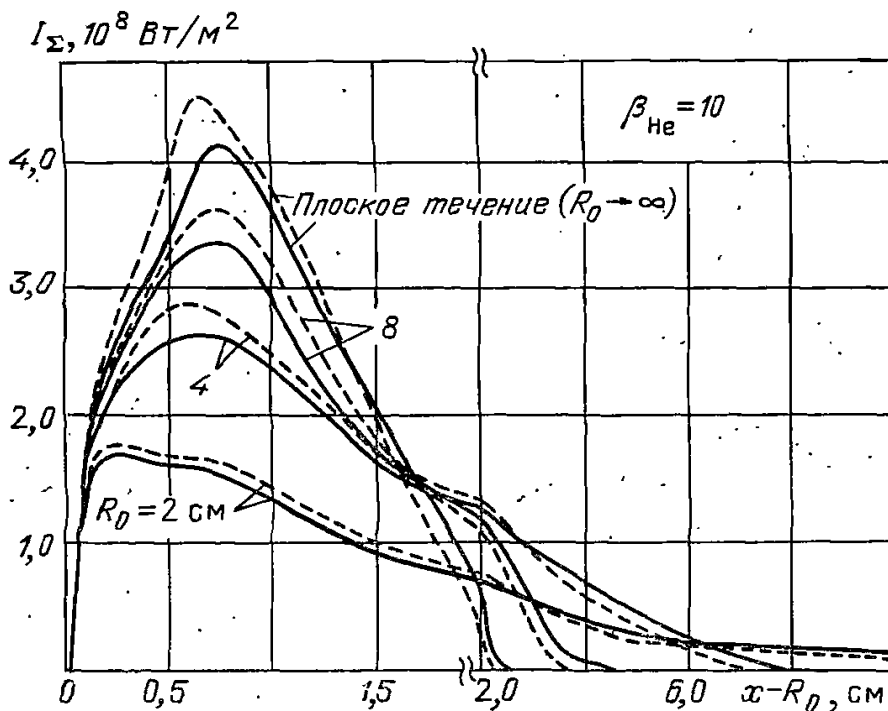


Рис. 5.25. Влияние радиуса соплового блока на распределение суммарной интенсивности излучения вдоль зоны генерации. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

резонатор σ , так же как и параметр β_{He} , определяют значение поперечных градиентов давления, а значит, и возможность использования приближения узкого канала для описания рассматриваемого течения.

Давления на срезах сопел горючего и окислителя во всех случаях задавались равными 7600 Па (в десять раз большими, чем при анализе ламинарных режимов течения), β_{He} менялось в диапазоне от 15 до 50, а σ — от $2 \cdot 10^{-3}$ до $5 \cdot 10^{-2}$.

В качестве граничных условий на входе в резонатор для уравнений переноса k и ε в соответствии с рекомендациями [240, 243] задавались профили k и ε в виде

$$k|_{x=0} = \sigma^2 u^2|_{x=0}, \quad \varepsilon|_{x=0} = A_\varepsilon k^{3/2}|_{x=0}/l_j.$$

Здесь $A_\varepsilon = 1,69$ [423, 512], а макромасштабы турбулентности в потоках горючего (l_1) и окислителя (l_2) считаются пропорциональными полувысотам выходных сечений соответствующих сопел ($l_j = \kappa L_j$, $\kappa = 0,4$ [423]). Расчеты в рамках приближения узкого канала проводились с помощью соответствующей модификации конечно-разностного метода В. А. Поспелова [230], предназначенного для

анализа ламинарных режимов течения, а в рамках полной системы уравнений Рейнольдса — с помощью алгоритма [439].

Анализируя результаты этих расчетов, следует прежде всего отметить, что при турбулентном режиме течения границы применимости приближения узкого канала по параметру β_{He} существен-

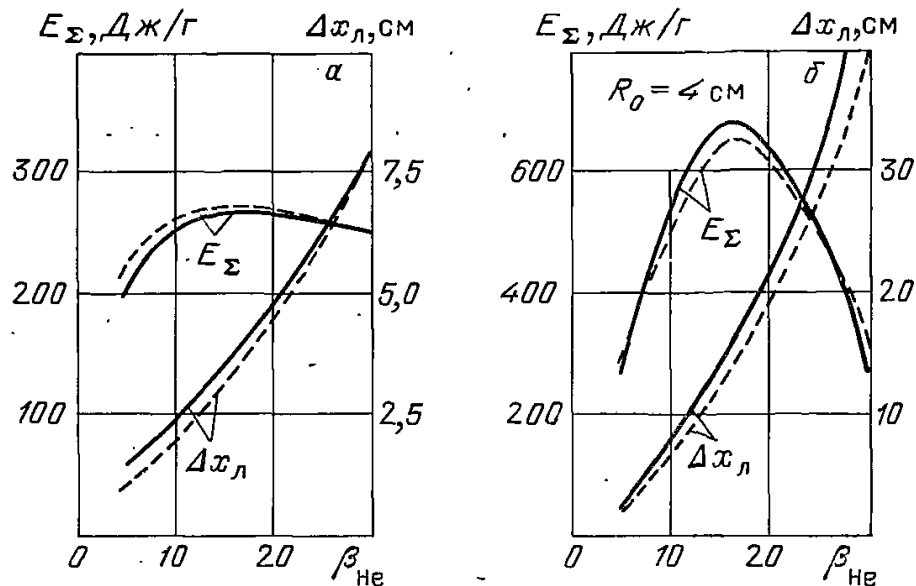


Рис. 5.26. Зависимость удельного энергосъема E_{Σ} и длины зоны генерации $\Delta x_{\text{л}}$ от степени разбавления окислителя гелием для НХЛ с плоским (а) и цилиндрическим (б) сопловыми блоками. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

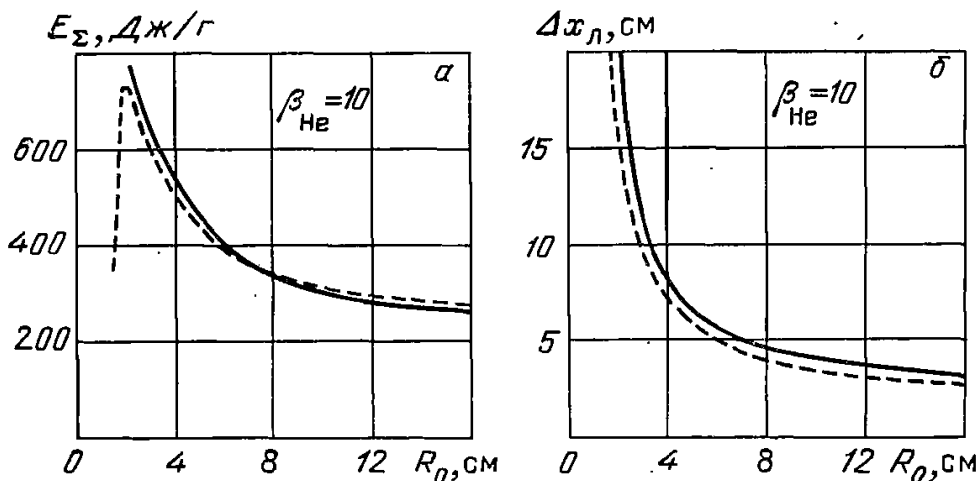


Рис. 5.27. Зависимость удельного энергосъема (а) и длины зоны генерации (б) от радиуса соплового блока. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

но сужаются по сравнению со случаем ламинарного режима течения. В частности, поле давления в полости резонатора при турбулентном течении оказывается сильно неоднородным в поперечном направлении даже при относительно высоком значении $\beta_{\text{He}} = 15$ (см. рис. 5.28—5.30), когда при ламинарном течении поперечные

градиенты давления в потоке пренебрежимо малы (см. рис. 5.12). Кроме того, обращает на себя внимание сложный, сильно немонотонный характер распределения давления на начальном участке

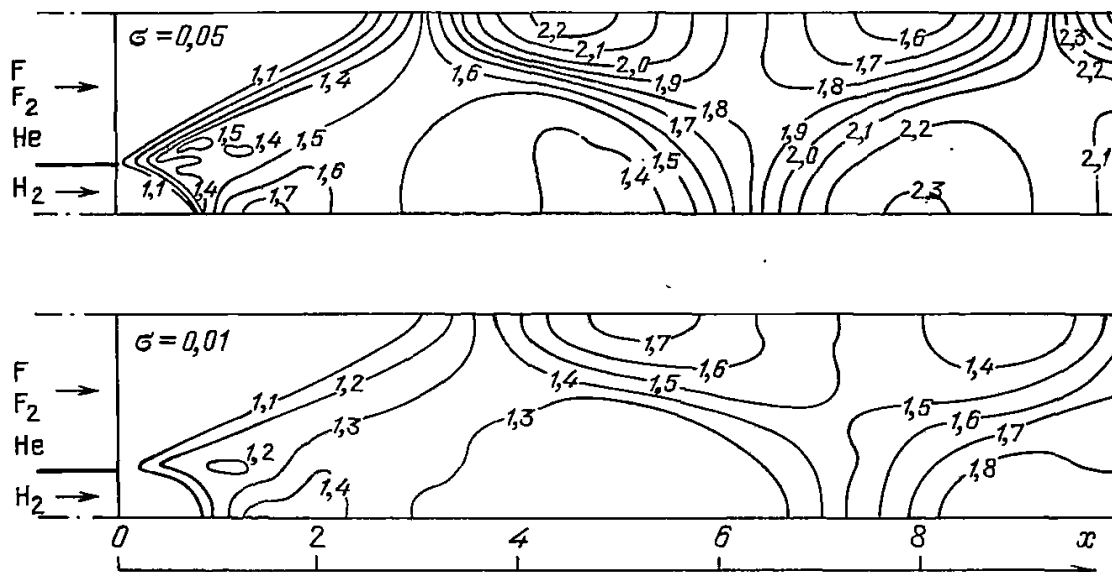


Рис. 5.28. Изолинии безразмерного давления для турбулентного режима течения при $\beta_{\text{He}} = 15$ и двух различных значений степени начальной турбулентности струй реагентов σ

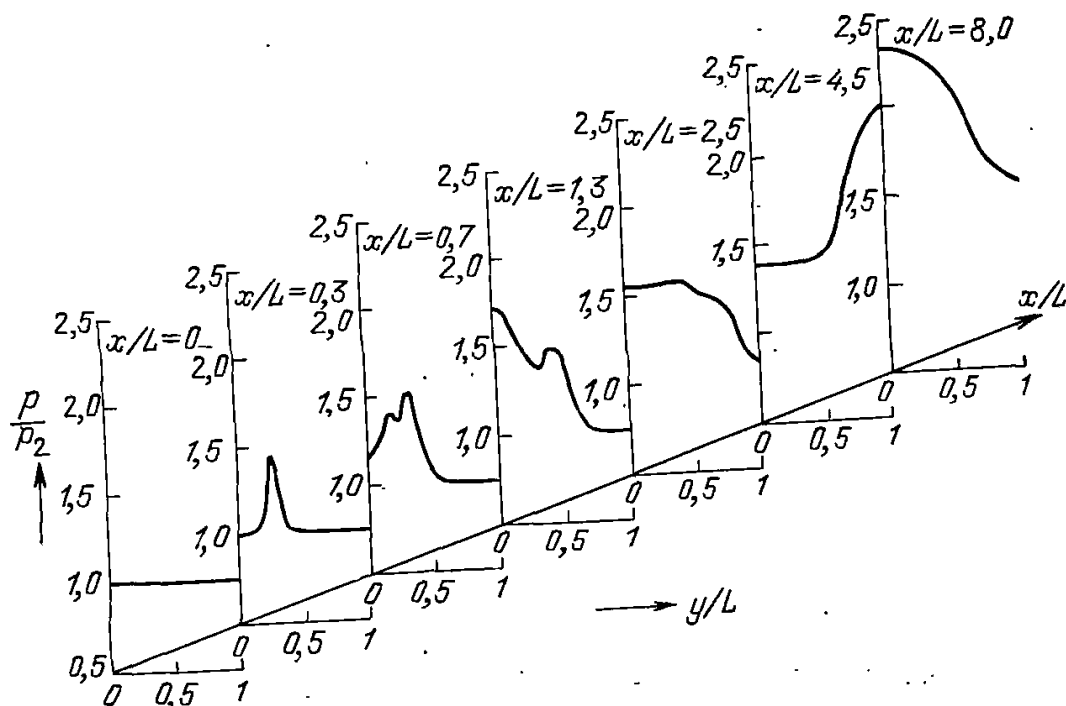


Рис. 5.29. Развитие профиля безразмерного давления вниз по потоку при $\beta_{\text{He}} = 15$ и $\sigma_{1,2} = 0,05$

течения (рис. 5.28, 5.29), обусловленный образованием в потоке косых скачков уплотнения. Их наличие сказывается и на пульсационных характеристиках течения, приводя к возникновению

дополнительных максимумов на поперечных профилях коэффициента турбулентной вязкости (рис. 5.31).

Увеличение погрешностей, связанных с использованием приближения узкого канала при расчете турбулентных режимов течения в полости резонаторов НХЛ, объясняются двумя причинами.

Во-первых, из-за более высокого, чем при ламинарном режиме течения, уровня давления в полости резонатора происходит существенное увеличение интегральной скорости горения, что в свою

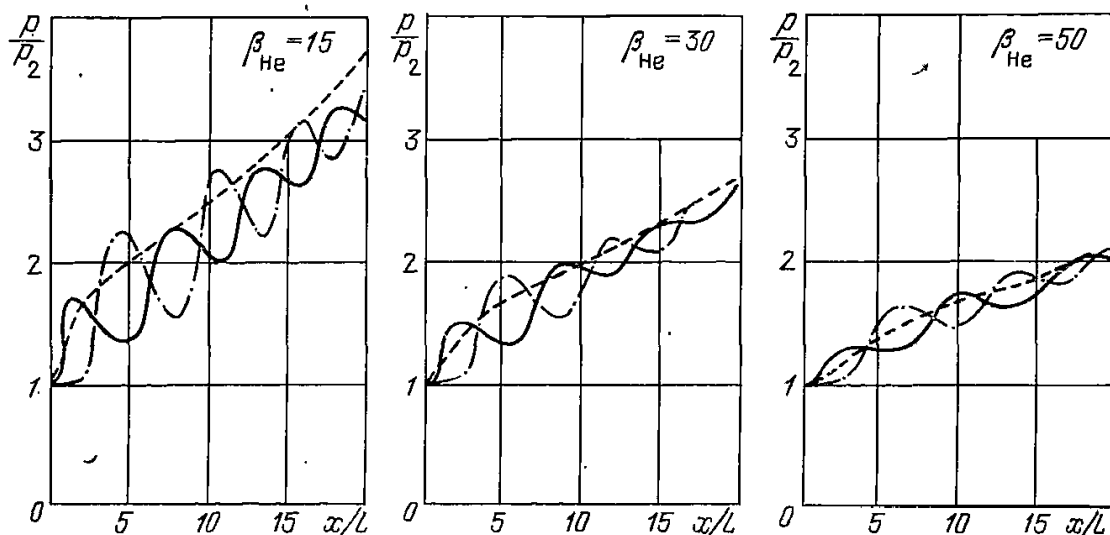


Рис. 5.30. Распределение давления вдоль плоскостей симметрии струй реагентов для турбулентного режима течения при $\sigma_{1,2} = 0,05$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.12

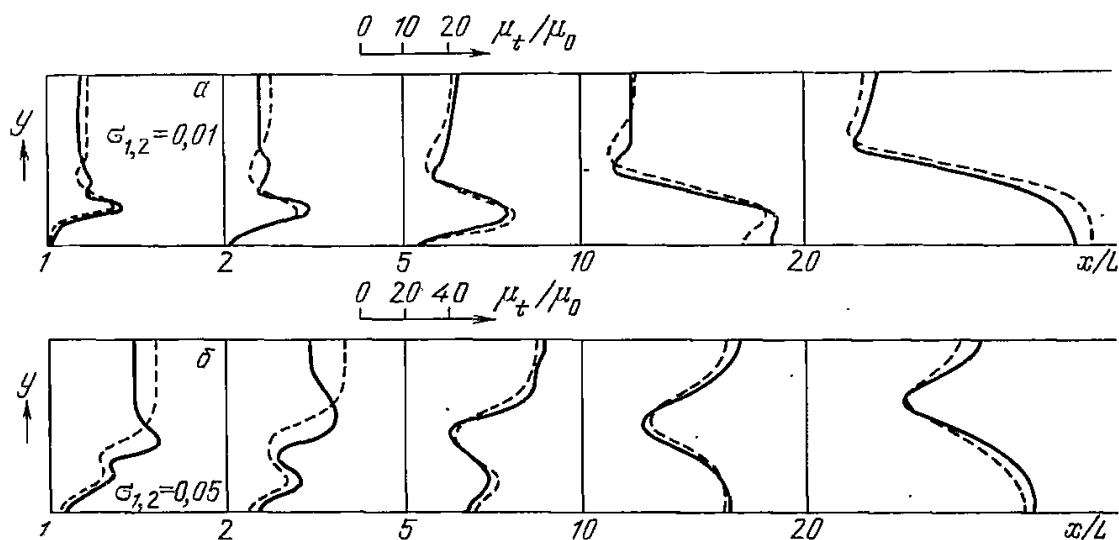


Рис. 5.31. Развитие профилей турбулентной вязкости вниз по потоку при $\beta_{He} = 15$. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

очередь влечет за собой более интенсивное тепловыделение в потоке. К тому же эффекту приводит увеличение скорости смешения реагентов за счет увеличения эффективных значений коэффициентов

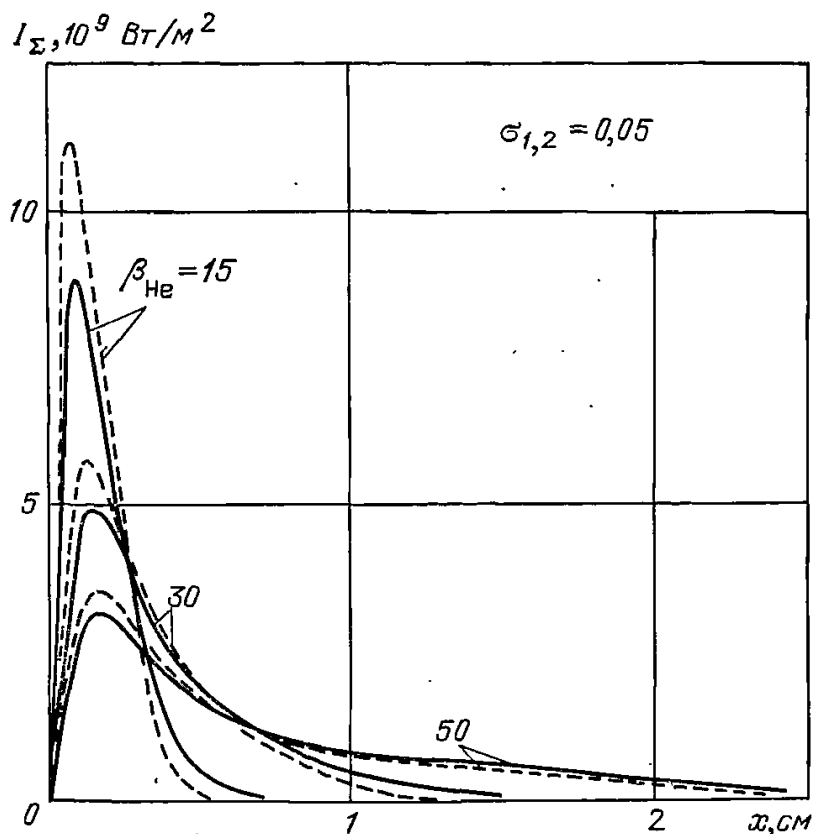


Рис. 5.32. Распределение суммарной интенсивности излучения вдоль зоны генерации при турбулентном режиме течения для различных степеней разбавления окислителя гелием. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

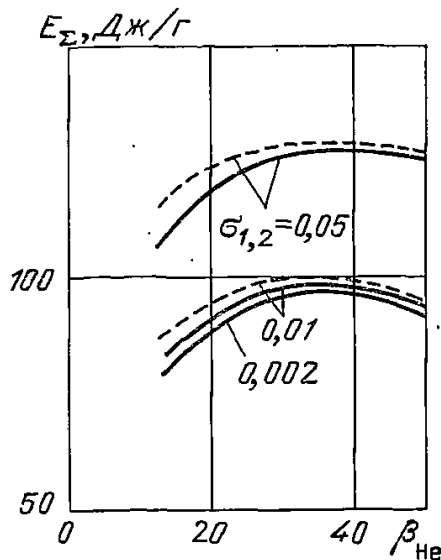


Рис. 5.33. Зависимость удельного энергосъема от величины параметра β_{He} при турбулентном режиме течения. Обозначения линий — те же, что и на рис. 5.11

переноса при турбулентных режимах течения смеси (особенно существенным указанное увеличение оказывается при высоких значениях начальной степени турбулентности — рис. 5.31, б). В результате использование приближения узкого канала при расчете турбулентных режимов течения в резонаторах НФ-НХЛ в рассмотренном

диапазоне изменения σ оказывается возможным лишь при $\beta_{ne} \geq 50$ (погрешность расчета локальных параметров течения не превышает при этом 15 %).

Аналогичный вывод можно сделать и относительно погрешностей, обусловленных использованием приближения узкого канала при расчете локальных значений интенсивности излучения внутри резонатора в случае работы рассматриваемого лазера (см. табл. 5.1) в режиме генерации (см. рис. 5.32). Что касается интегральных энергетических характеристик лазера, то по причинам, подробно рассмотренным при анализе ламинарных режимов течения, они с достаточной степенью точности могут быть определены в рамках приближения узкого канала в значительно более широком диапазоне изменения β_{ne} (рис. 5.33).

СУЩЕСТВЕННО ДОЗВУКОВЫЕ ВНУТРЕННИЕ ТЕЧЕНИЯ СО СЛОЖНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ НАЛИЧИИ КОНЕЧНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПЛОТНОСТИ

§ 24. Введение

Как отмечалось в гл. 2, медленные (существенно дозвуковые) течения вязких газовых смесей играют чрезвычайно важную роль в современной технике. Для адекватного описания таких течений следует, вообще говоря, использовать полную систему уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9). Однако на этом пути возникают серьезные трудности, причины и характер которых подробно рассмотрены в § 5.

Одним из возможных путей преодоления или, точнее говоря, обхода этих трудностей является использование для численного моделирования данного класса течений приближенной модели, сформулированной в § 6 (п. 6.2.2). При достаточно малых значениях квадрата характерного числа Маха потока эта модель практически не уступает по точности полной системе уравнений Навье — Стокса (см. рис. 2.2). В то же время, с точки зрения простоты численной реализации, различные модификации данной модели (в дальнейшем для краткости она называется моделью СДТ — существенно дозвуковых течений) являются, по существу, эквивалентными классической модели вязкой несжимаемой жидкости или приближению Буссинеска (при анализе естественно- и смешанно-конвективных течений), которые имеют весьма жесткие ограничения по значениям параметров, характеризующих степень пространственной неоднородности поля плотности в потоке.

В данной главе сделана попытка по возможности полно осветить методические аспекты проблемы использования модели СДТ при численном моделировании широкого круга дозвуковых течений вязких газов и газовых смесей. В частности, в § 25 описываются конечно-разностные методы, разработанные для расчета на основе этой модели нестационарных и стационарных дозвуковых течений газовых смесей, а в § 26 излагаются результаты численных исследований, направленных на определение границ применимости модели СДТ по значениям числа Маха и параметра гидростатической сжимаемости. Там же приведены примеры использования модели СДТ для оценки границ применимости менее общих моделей дозвуковых течений, в частности, приближения Буссинеска.

Заключительный параграф главы посвящен обсуждению некоторых результатов численных параметрических исследований различных типов дозвуковых внутренних течений со сложной структурой, выполненных на основе модели СДТ.

§ 25. Методы расчета дозвуковых течений газовых смесей на основе модели СДТ

25.1. Конечно-разностная схема и алгоритм расчета нестационарных течений. Как уже отмечалось в п. 6.2.3, для расчета нестационарных течений газовых смесей в рамках модели СДТ в настоящее время используются частично неявные конечно-разностные методы, представляющие собой обобщение на этот случай различных модификаций известного SMAC-метода Амсдена и Харлоу [198], предложенных для численного интегрирования системы уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости (2.72), (2.73). В частности, в работах [183—187, 189—192] для этой цели применяется конечно-разностная схема, являющаяся обобщением одной из таких версий SMAC-метода, предложенной Хиртом и Куком [100]. Проиллюстрируем основные этапы построения этой схемы на примере модификации модели СДТ, предназначенной для описания смешанно-конвективных течений газовых смесей при наличии в потоке произвольных конечных изменений плотности (система уравнений (2.121), (2.123) — (2.129)).

Для пояснения общей структуры данной схемы рассмотрим вначале конечно-разностную аппроксимацию этой системы по времени. Пусть τ^n — шаг интегрирования по времени $\tau^n = t^{n+1} - t^n$, где n — номер временного слоя. Вводя сеточные функции $\mathbf{v}_h^n$, ρ_h^n , T_h^n , p_h^n и т. д., аппроксимирующие соответствующие непрерывные функции в узлах конечно-разностной сетки, построим следующую частично неявную конечно-разностную схему для численного интегрирования системы (2.121), (2.123) — (2.126):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \mathbf{v}_h^{n+1} = & \frac{1}{p^*(t^n)} \left\{ \text{Sh} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{(c_p)_h^n m_h^n} - 1 \right] \frac{(p^*)^{n+1} - (p^*)^n}{\tau^n} + \right. \\ & + \frac{1}{\text{Re Sc}} \sum_{j=1}^{N_h} \left[\frac{(h_j)_h^n m_j}{(c_p)_h^n m_h^n} - T_h^n \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \frac{(\mathbf{J}_j)_h^n}{m_j} - \frac{1}{\text{Re Pr} (c_p)_h^n m_h^n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \mathbf{q}_h^n + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{N_h} \left[T_h^n - \frac{(h_j)_h^n m_j}{(c_p)_h^n m_h^n} \right] \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \frac{(\dot{w}_{js})_h^n}{m_j} \right\} \equiv S_h^n, \quad (6.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sh} \rho_h^n \frac{\mathbf{v}_h^{n+1} - \mathbf{v}_h^n}{\tau^n} + \left[(\rho \mathbf{v})_h^n \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \right] \mathbf{v}_h^n = & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (\tilde{p}_h^{n+1}) + \\ & + \frac{1}{\varepsilon_p \text{Fr}} \frac{g}{g} (\rho_h^n - (\rho^*)^n) + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \left[\mu_h^n \left(\dot{S}_h^n - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \mathbf{v}_h^n \varepsilon \right) \right], \quad (6.2) \end{aligned}$$

$$\text{Sh } \rho_h^n \frac{(c_i)_h^{n+1} - (c_i)_h^n}{\tau^n} + \rho_h^n \mathbf{v}_h^n \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (c_i)_h^n =$$

$$= (\Omega_i)_h^n + (c_i)_h^{n+1} (\omega_i)_h^n - \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (\mathbf{J}_i)_h^n, \quad (6.3)$$

$$\text{Sh } \rho_h^n \left[(c_p)_h^n \frac{T_h^{n+1} - T_h^n}{\tau^n} + \sum_{j=1}^{N_h} (h_j)_h^n \frac{(c_j)_h^{n+1} - (c_j)_h^n}{\tau^n} \right] +$$

$$+ \rho_h^n \mathbf{v}_h^n \cdot \left[(c_p)_h^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} T_h^n + \sum_{j=1}^{N_h} (h_j)_h^n \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (c_j)_h^n \right] =$$

$$= \text{Sh } \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{(p^*)^{n+1} - (p^*)^n}{\tau^n} - \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \mathbf{q}_h^n, \quad (6.4)$$

$$\rho_h^{n+1} = \frac{(p^*)^{n+1} m_h^{n+1}}{T_h^{n+1}}, \quad (m_h^{n+1})^{-1} = \sum_{j=1}^{N_h} \frac{(c_j)_h^{n+1}}{m_j},$$

$$(\rho^*)^{n+1} = \frac{(p^*)^{n+1} (m^*)^{n+1}}{(T^*)^{n+1}}. \quad (6.5)$$

где величины Ω_i и ω_i определяются соотношениями (4.23), (4.24).

Схема (6.1)–(6.5) аппроксимирует систему дифференциальных уравнений (2.121), (2.123)–(2.126) с первым порядком точности по времени. По своей структуре она близка к схеме [100], предназначенной для численного интегрирования уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Отличия схемы (6.1)–(6.5) от схемы [100] связаны с аппроксимацией правой части уравнения (2.121), которая в рамках модели несжимаемой жидкости равна нулю, а также с аппроксимацией источниковых и диффузионных членов в уравнениях переноса массы отдельных компонент и энергии смеси (2.124), (2.125), отсутствующих в системе уравнений движения однородной вязкой несжимаемой жидкости. Для сохранения простоты алгоритма, с помощью которого реализуется схема [100], в случае расчета нестационарных течений газовых смесей в рамках модели СДТ все перечисленные дополнительные по сравнению с моделью вязкой несжимаемой жидкости члены системы уравнений (2.121), (2.123)–(2.126), за исключением химических источ-

никовых членов $\sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s w_{is}$ в уравнениях (2.124), аппроксимируются в схеме (6.1)–(6.5) явно (на n -м временном слое). Члены $\sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s w_{is}$ аппроксимируются частично неявно (с использованием представления этих членов в форме (4.22), являющейся общей для всех описанных в гл. 4, 5 конечно-разностных схем). Это в значительной степени ослабляет ограничения на шаг ин-

тегрирования по времени (2.27), вытекающие из условий устойчивости схем с полностью явной аппроксимацией химических источников, с одной стороны, и не приводит к усложнению алгоритма расчета по сравнению с полностью явными схемами — с другой.

Рассмотрим основные этапы этого алгоритма.

Система разностных уравнений (6.1) — (6.5) распадается на две подсистемы, решения которых могут быть найдены последовательно.

В первую подсистему входят уравнения (6.1), (6.2), в которых неизвестными являются две сеточные функции $\mathbf{v}_h^{n+1}$ и $\tilde{p}_h^{n+1}$, а во вторую — остальные уравнения (6.3) — (6.5) относительно $(N_k + 2)$ -х неизвестных сеточных функций $(c_i)_h^{n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, N_k$), T_h^{n+1} и ρ_h^{n+1} .

На первом этапе расчета решаются уравнения (6.1), (6.2). Для этого используется итерационная процедура (k — номер итерации):

$$(\mathbf{v}_h^{n+1})^k = \mathbf{v}_h^n + \frac{\tau^n}{Sh} \left(\mathbf{v}_h^n \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \right) \mathbf{v}_h^n - \frac{\tau^n}{Sh \rho_h^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (\tilde{p}_h^{n+1})^{k-1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\varepsilon_p Fr} (\rho_h^n - (\rho^*)^n) \frac{\mathbf{g}}{g} - \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \left[\mu_h^n \left(\dot{S}_h^n - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} \cdot \mathbf{v}_h^n \dot{\varepsilon} \right) \right] \right\}, \quad (6.6)$$

$$(\tilde{p}_h^{n+1})^k = (\tilde{p}_h^{n+1})^{k-1} - \beta \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (\mathbf{v}_h^{n+1})^k - S_h^n \right], \quad (6.7)$$

где $\beta > 0$ — итерационный параметр.

В качестве начального приближения для $\tilde{p}_h^{n+1}$ используется известное распределение этой величины на предыдущем временном слое n .

Из (6.6), (6.7) видно, что при достижении сходимости итераций, т. е. при выполнении условия

$$|(\tilde{p}_h^{n+1})^k - (\tilde{p}_h^{n+1})^{k-1}| \leq \varepsilon, \quad (6.8)$$

где ε — заданная малая величина, найденные на последней итерации поля вектора скорости $\mathbf{v}_h^{n+1}$ и динамического давления $\tilde{p}_h^{n+1}$ будут с требуемой степенью точности удовлетворять уравнениям (6.1), (6.2).

Как показали Хирт и Кук [100], описанная итерационная процедура определения $\tilde{p}_h^{n+1}$ эквивалентна решению уравнения Пуассона для давления методом верхней релаксации. Однако она допускает и простую физическую интерпретацию, которая состоит в следующем [181]. Если разность $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (\mathbf{v}_h^{n+1})^k - S_h^n$, входящая в правую часть (6.7), больше нуля, то относительная скорость объемного расширения газа в рассматриваемой ячейке конечно-разностной сетки больше, чем это требуется в соответствии с

уравнением (6.1) и, следовательно, давление в этой ячейки необходимо понизить; наоборот, если $\frac{\partial}{\partial x_h} (v_h^{n+1})^k - S_h^n$ меньше нуля, то относительная скорость объемного расширения меньше, чем требуется для удовлетворения уравнения (6.1) и, следовательно, давление в ячейке необходимо повысить. Именно такой закон управления давлением в процессе итераций обеспечивается благодаря наличию знака минус перед β в правой части (6.7).

Скорость сходимости итерационного процесса (6.6), (6.7) регулируется параметром β , оптимальное значение которого зависит от временного и пространственных шагов интегрирования, а также от типа рассматриваемого течения. При расчете плоских течений оно определяется соотношением [181]

$$\beta_{\text{опт}} = (1,7/\tau^n) \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right)^{-1} \quad (6.9)$$

(h_x и h_y — шаги конечно-разностной сетки), которое основывается на уже отмечавшейся аналогии между алгоритмом (6.6), (6.7) и методом верхней релаксации решения уравнения Пуассона для определения поля давления. Кроме того, для ускорения расчетов полезно использовать оригинальный алгоритм реализации (6.6), (6.7), предложенный Виецелли [513].

Завершая описание первого этапа алгоритма решения системы уравнений (6.1) — (6.5), связанного с расчетом полей скорости и динамического давления v_h^{n+1} и $\tilde{p}_h^{n+1}$, отметим, что перед началом этого этапа необходимо определить также величину $(p^*)^{n+1}$, т. е. средний уровень статического давления в потоке на $(n+1)$ -м временном слое.

При решении нестационарных задач о расчете внутренних течений в областях с проницаемыми участками границы в качестве функции $p^*(t)$ естественно использовать задаваемую в числе граничных условий к исходной системе уравнений зависимость от времени статического давления в какой-либо точке проницаемого участка границы расчетной области. При расчете течений в замкнутых объемах с твердыми непроницаемыми стенками величина $p^*(t)$ должна определяться в процессе решения задачи из каких-либо интегральных условий баланса. Например, интегрируя по всему рассматриваемому объему уравнение (2.121) с учетом равенства

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega \equiv \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0, \quad (6.10)$$

вытекающего из граничных условий прилипания на твердых непроницаемых стенках $\mathbf{v}|_{\sigma} = 0$ ($\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности σ , ограничивающей рассматриваемый объем Ω), получим соотношение

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{1}{\text{Sh} \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma c_p m} - 1 \right) d\Omega} \times$$

$$\times \left\{ \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\text{Re Pr } c_p m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\text{Re Sc}} \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{h_j m_j}{c_p m} - T \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_j}{m_j} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N_k} \left(\frac{h_j m_j}{c_p m} - T \right) \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \frac{\dot{w}_{js}}{m_j} \right] d\Omega \right\}, \quad (6.11)$$

разностный аналог которого

$$\frac{(p^*)^{n+1} - (p^*)^n}{\tau^n} = \frac{(I_1)_h^n}{(I_2)_h^n}, \quad (6.12)$$

аппроксимирующий (6.11) с первым порядком точности по времени $((I_1)_h^n$ и $(I_2)_h^n$ — дискретные аналоги объемных интегралов в числителе и знаменателе правой части (6.11)), служит для определения величины $[(p^*)^{n+1} - (p^*)^n]/\tau^n$, входящей в правую часть (6.1).

Таким образом, при расчете в рамках рассматриваемого алгоритма течений в замкнутых объемах в начале каждого нового $(n+1)$ -го временного шага по известным параметрам течения на шаге n с использованием (6.12) находится разностный аналог величины dp^*/dt , после чего с помощью описанного выше итерационного алгоритма (6.6), (6.7) определяются поля скорости и динамического давления $\mathbf{v}_h^{n+1}$ и $\tilde{p}_h^{n+1}$ на новом временном шаге*). После того как поля $\mathbf{v}_h^{n+1}$, $\tilde{p}_h^{n+1}$ и значение $(p^*)^{n+1}$ определены, расчет остальных параметров потока на $(n+1)$ -м слое по времени не составляет труда.

Вначале из уравнений (6.4) по явным формулам определяются поля концентраций отдельных компонент смеси $(c_i)_h^{n+1}$. Затем из уравнения (6.3) — температура T_h^{n+1} , а из уравнения состояния (6.5) — плотность смеси ρ_h^{n+1} . Далее с помощью выражений

$$(\mathbf{J}_i)_h^{n+1} = - \frac{\rho_h^{n+1}}{(B_i)_h^{n+1}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_h} (c_i)_h^{n+1} + (\tilde{\delta}_{J_i})_h^n, \quad (6.14)$$

*) В случае однородного газа с постоянной удельной теплоемкостью ($m = 1$, $c_p = 1$) соотношение (6.11) существенно упрощается и приобретает вид

$$\frac{dp^*}{dt} = - \frac{\gamma}{\text{Sh Re Pr } \Omega} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.13)$$

Из (6.13) сразу следует, например, что при описании естественно-конвективного движения однородного газа в замкнутом адиабатическом в интегральном смысле $\left(\int_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \right)$ объеме на основе модели СДТ уровень статического давления в нем не изменяется.

$$\begin{aligned}
(\tilde{\delta}_{J_i})_h^n = & \frac{m_h^{n+1} (c_i)_h^{n+1}}{(B_i)_h^{n+1}} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{1}{m_j (D_{ij})_h^{n+1}} - \frac{1}{m_i (D_{ii})_h^{n+1}} \right) (J_j)_h^{n+1} + \right. \\
& \left. + \sum_{j=i}^{N_k} \left(\frac{1}{m_j (D_{ij})_h^{n+1}} - \frac{1}{m_i (D_{ii})_h^{n+1}} \right) (J_j)_h^n \right] + \\
& + \frac{1}{(B_i)_h^{n+1}} \left\{ \sum_{j=1}^{N_k} \frac{m_h^{n+1}}{m_j (D_{ij})_h^{n+1}} [(c_i)_h^{n+1} (D_j^T)_h^{n+1} - (c_j)_h^{n+1} (D_i^T)_h^{n+1}] \frac{\partial}{\partial r_h} (\ln T)_h^{n+1} - \right. \\
& \left. - \rho_h^{n+1} (c_i)_h^{n+1} \frac{\partial}{\partial r_h} (\ln m)_h^{n+1} \right\}, \quad (6.15)
\end{aligned}$$

аппроксимирующих соотношения Стефана — Максвелла, записанные в форме (2.31)*) с первым порядком точности по времени, определяются дискретные аналоги диффузионных потоков компонент $(J_i)_h^{n+1}$. При этом следует помнить, что начальные значения этих величин $(J_i)_h^0$ должны удовлетворять соотношениям Стефана — Максвелла при соответствующих заданным начальным условиям полей концентраций отдельных компонент и температуры смеси.

На этом расчет очередного $(n+1)$ -го временного шага заканчивается, и вся описанная процедура повторяется вплоть до окончания решения, т. е. до достижения заданного момента времени.

В заключение рассмотрим конкретные способы пространственной аппроксимации системы уравнений (2.121), (2.123) — (2.126), используемые при построении схемы (6.1) — (6.5). Она осуществляется на так называемой МАС-сетке [514], фрагмент которой для двумерного случая изображен на рис. 6.1. Эта сетка состоит из основной системы узлов с координатами x_i, y_j, z_λ и двух (в случае решения двумерных задач) или трех (в случае трехмерных) вспомогательных, сдвинутых относительно основной на половину шага по x, y и z соответственно.

В узлах основной сетки определяются сеточные функции $\rho_h, \tilde{p}_h, T_h, (c_i)_h$ ($i = 1, 2, \dots, N_k$), а также переносные и теплофизические свойства смеси. Проекция вектора скорости на оси координат x, y и z определяются во вспомогательных узлах, сдвинутых соответственно в направлениях x, y и z , т. е. u_h — в узлах $x_{i+1/2}, y_j, z_\lambda$; v_h — в узлах $x_i, y_{j+1/2}, z_\lambda$, а w_h — в узлах $x_i, y_j, z_{\lambda+1/2}$. Аналогичным образом определяются проекции на оси координат векторов диффузионных потоков компонент.

*) Напомним, что в рамках модели СДТ бародиффузия не учитывается, поскольку соответствующие члены соотношений Стефана — Максвелла (2.31) имеют порядок M^2 .

Сетка располагается таким образом, чтобы вспомогательные узлы совпадали с соответствующими границами расчетной области (см. рис. 6.1).

Проекция уравнения переноса импульса (2.123) на оси x , y и z аппроксимируются в узлах соответствующих вспомогательных секток. В узлах основной сетки аппроксимируется уравнение (2.121),

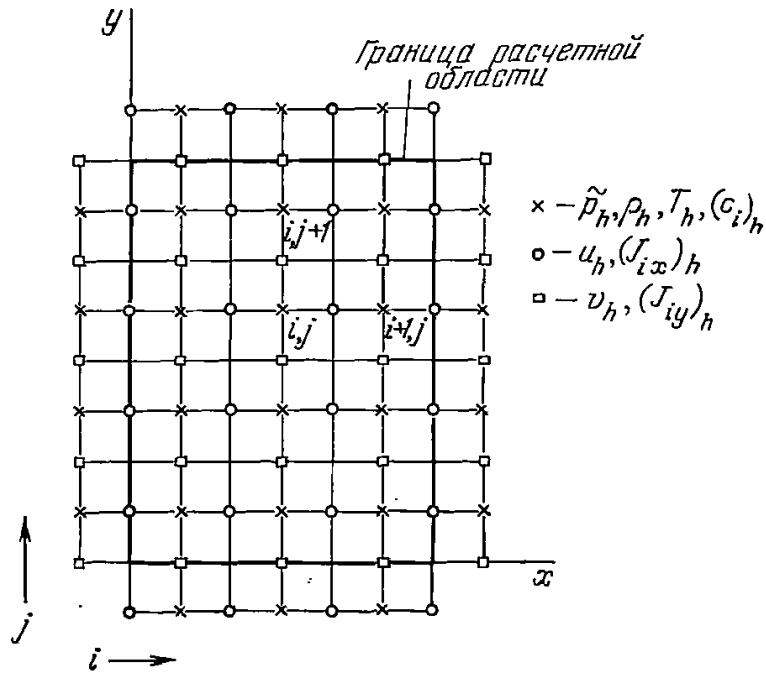


Рис. 6.1. Конечно-разностная МАС-сетка

а также уравнения переноса массы отдельных компонент и энергии смеси (2.124), (2.125). При этом необходимые для построения разностных аналогов значения сеточных функций в «чужих» узлах сетки определяются путем линейной интерполяции между их значениями в «своих» узлах. Например,

$$u_{i,j} = (u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j})/2. \quad (6.16)$$

Пространственные производные в исходных уравнениях аппроксимируются центральными разностями со вторым порядком точности. Исключение составляет лишь аппроксимация конвективных членов уравнений переноса. При решении задач с существенно неоднородным пространственным распределением параметров потока в расчетной области в начальный момент времени использование симметричных разностей при аппроксимации этих членов приводит к нефизическим осцилляциям решения. Для устранения этих осцилляций на начальной стадии решения ($t \leq 100 \tau$) конвективные члены аппроксимируются с помощью несимметричных (против потока) двухточечных разностей первого порядка точности [90].

Граничные условия к системе (2.121), (2.123)–(2.126) аппроксимируются обычным для МАС-сетки способом (с привлечением

«заграничных» узлов [32, 198]). При этом значения сеточных функций в «заграничных» точках в случае необходимости определяются с помощью квадратичной экстраполяции по значениям этих функций на границе и в двух ближайших к ней внутренних точках соответствующей сетки.

25.2. Конечно-разностная схема и алгоритм расчета стационарных течений [168, 188, 515]. Конечно-разностная схема (6.1) — (6.5), очевидно, может использоваться и для расчета стационарных течений газовых смесей в рамках модели СДТ с помощью метода установления. Однако в данном случае ее применение является малоэффективным из-за необходимости выполнения условий устойчивости, которые для плоских течений имеют вид [100]:

$$\tau^n \leq \min \left\{ \left[\frac{\max \{u_h^n\}}{h_x} + \frac{\max \{v_h^n\}}{h_y} \right]^{-1}, \frac{1}{2} \frac{h_x^2 h_y^2}{h_x^2 + h_y^2} \operatorname{Re} \min \{1, Sc, Pr\} \right\}. \quad (6.17)$$

Если при решении нестационарных задач условия (6.17), как правило, согласуются, а иногда оказываются даже менее жесткими, чем ограничения, накладываемые на τ^n требованиями точности численного решения, то при расчете стационарных течений методом установления, когда значение τ^n должно выбираться исключительно из соображений повышения скорости сходимости процесса установления к искомому стационарному решению, необходимость выполнения (6.17) или других подобных условий оказывается крайне нежелательной, так как оптимальные с точки зрения скорости сходимости значения τ^n обычно существенно превосходят значения этого параметра, обеспечивающие устойчивость явных конечно-разностных схем. В связи с этим при решении в рамках модели СДТ стационарных задач более целесообразным представляется использование высокоустойчивых неявных конечно-разностных схем, реализуемых скалярными прогонками. Такие схемы могут быть построены на основе идеи введения искусственной сжимаемости [199—201] и применения принципа расщепления по координатам и физическим процессам [31]. Рассмотрим одну из возможных схем этого типа [515], предназначенную для расчета стационарных двумерных (плоских и осесимметричных) течений. Данная схема базируется на системе уравнений модели СДТ в форме (2.122), (2.123), (2.125) — (2.130) с той лишь разницей, что вместо члена $Sh \partial \rho / \partial t$ в уравнении неразрывности (2.122) вводится член $A \partial \tilde{p} / \partial t$ ($A = \operatorname{const} > 0$) — так называемая искусственная сжимаемость. Очевидно, что такая замена не может изменить искомого стационарного решения исходной системы уравнений, однако она делает уравнение (2.122) эволюционным относительно динамического давления $\tilde{p}$, что значительно облегчает построение конечно-разностных схем расщепления по координатам и физическим процессам для расчета стационарных течений на основе модели СДТ.

После введения искусственной сжимаемости система уравнений (2.122), (2.123), (2.125) — (2.130) для случая плоского или осесимметричного течения может быть записана в следующей скалярной форме (используется декартова ($\alpha = 0$) или цилиндрическая ($\alpha = 1$) система координат, направление силы тяжести предполагается параллельным оси x):

$$A \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial (y^\alpha \rho v)}{\partial y} = 0, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Fr}} \frac{\rho - 1}{\rho} - \\ - \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial y^\alpha v}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (6.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\ + \frac{4}{3} \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \\ \left. + \frac{2}{3} \alpha \frac{\mu}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y v}{\partial y} \right) - 2 \alpha \mu \frac{v}{y^2} - \frac{2}{3} \alpha \frac{1}{y} \frac{\partial \mu v}{\partial y} \right] = 0, \quad (6.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re Pr } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \sum_{j=1}^{N_k} h_j \frac{\partial c_j}{\partial x} \right) + \right. \\ + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\lambda}{c_p} \sum_{j=1}^{N_k} h_j \frac{\partial c_j}{\partial y} \right) \left. \right] + \\ + \frac{1}{\text{Re Sc } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^{N_k} J_{jx} h_j \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \sum_{j=1}^{N_k} J_{jy} h_j \right) \right] = 0, \quad (6.21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial t} + u \frac{\partial c_i}{\partial x} + v \frac{\partial c_i}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s w_{is} + \frac{1}{\text{Re Sc } \rho} \left[\frac{\partial J_{ix}}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha J_{iy}) \right] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_k, \quad (6.22) \end{aligned}$$

$$\rho = m/T, \quad m^{-1} = \sum_{j=1}^{N_k} c_j/m_j. \quad (6.23)$$

При записи системы (7.18) — (7.23) число Струхала, а также величины $\rho^*(t)$ и $p^*(t)$, входящие в исходную систему, полагаются равными единице, так как рассматриваются только стационарные течения.

Для замыкания системы уравнений (6.18) — (6.23) используется выражение (2.129) для w_{is} , а также система соотношений Стефана — Максвелла в форме (2.31). Термодиффузия, бародиффузия и диффузионный термоэффект не учитываются.

Представим систему уравнений (6.18) — (6.22) в условной векторной форме, аналогичной (5.36):

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{W} + \mathbf{Q} + \mathbf{H} = 0. \quad (6.24)$$

Здесь $\mathbf{f} = [\tilde{p}, u, v, h, c_i]^T$ — $(N_k + 4)$ -мерный вектор основных переменных, вектор $\mathbf{Q}$ включает член с выталкивающей силой в уравнении (6.19) и химические источниковые члены в уравнениях переноса массы компонент смеси (6.22)

$$\mathbf{Q} = \left[0, \frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Fr}} \frac{\rho - 1}{\rho}, 0, 0, -\frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{N_R} \text{Da}_s \dot{w}_{is} \right]^T, \quad (6.25)$$

а вектор $\mathbf{H} = [0, H_u, H_v, H_h, H_{c_i}]^T$, как и в (5.38), содержит члены со смешанными производными в уравнениях переноса импульса (6.19), (6.20), а также члены уравнений переноса энергии смеси и массы ее отдельных компонент (6.21), (6.22), содержащие величины $\delta_{J_{ix}}$ и $\delta_{J_{iy}}$ из (2.31).

В вектор $\mathbf{W} = [W_{\tilde{p}}, W_u, W_v, W_h, W_{c_i}]^T$ включены остальные члены системы уравнений (6.18) — (6.22):

$$W_{\tilde{p}} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha \rho v}{\partial y} \right), \quad (6.26)$$

$$W_u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} - \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right], \quad (6.27)$$

$$W_v = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{4}{3} \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{2}{3} \alpha \frac{\mu}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial y v}{\partial y} \right) - 2 \alpha \mu \frac{v}{y^2} - \frac{2}{3} \alpha \frac{\mu}{y} \frac{\partial \mu v}{\partial y} \right], \quad (6.28)$$

$$W_h = u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re Pr } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{\text{Re } \rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{j=1}^{N_k} h_j \left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\lambda}{c_p} - \frac{1}{\text{Sc}} \frac{\rho}{B_j} \right) \frac{\partial c_j}{\partial x} \right] + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\alpha \sum_{j=1}^{N_k} h_j \left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\lambda}{c_p} - \frac{1}{\text{Sc}} \frac{\rho}{B_j} \right) \frac{\partial c_j}{\partial y} \right] \right\}, \quad (6.29)$$

$$W_{c_i} = u \frac{\partial c_i}{\partial x} + v \frac{\partial c_i}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re Sc } \rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\alpha \frac{\rho}{B_i} \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) \right]. \quad (6.30)$$

Представим вектор $\mathbf{W}$ в форме расщепления по координатам и физическим процессам. Для этого преобразуем (6.26) к виду

$$W_{\tilde{p}} = \frac{1}{A} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right] \quad (6.31)$$

и выразим производные от плотности $\partial \rho / \partial x$ и $\partial \rho / \partial y$ через производные от основных переменных (h, c_i) с помощью уравнения состояния (6.23). Тогда после несложных преобразований получим

$$W_{\tilde{p}} = \frac{1}{A} \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha v}{\partial y} \right) + \rho u \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{h_j}{c_p T} - \frac{m}{m_j} \right) \frac{\partial c_j}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{\rho u}{c_p T} \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \sum_{j=1}^{N_h} \left(\frac{h_j}{c_p T} - \frac{m}{m_j} \right) \frac{\partial c_j}{\partial y} - \frac{\rho v}{c_p T} \frac{\partial h}{\partial y} \right]. \quad (6.32)$$

С использованием (6.27) — (6.30), (6.32) вектор $\mathbf{W}$ можно представить в следующей форме расщепления по координатам и физическим процессам:

$$\mathbf{W} = \sum_{p=1}^2 \Omega_p \mathbf{f}, \quad (6.33)$$

где матричные дифференциальные операторы Ω_1 и Ω_2 имеют вид:

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho}{A} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -\frac{1}{A} \frac{\rho u}{c_p T} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\rho u}{A} \left(\frac{h_j}{c_p T} - \frac{m}{m_j} \right) \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} & u \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \frac{\alpha}{\text{Re } \rho} \frac{\mu}{y} \frac{\partial}{\partial x} & u \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{\text{Re } \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[h_j \left(\frac{\lambda}{\text{Pr } c_p} - \frac{\rho}{\text{Sc } B_j} \right) \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \frac{\partial}{\partial x} \\ & & & & -\frac{1}{\text{Re } \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(q_1'' \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A} \rho \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial y} & -\frac{1}{A} \frac{\rho v}{c_p T} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\rho v}{A} \left(\frac{h_j}{c_p T} - \frac{m}{m_j} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & v \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} & 0 & v \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\alpha}{\text{Re } \rho} \left(\frac{2}{3} \frac{\mu}{y^2} \frac{\partial y}{\partial y} - \frac{2\mu}{y^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{y} \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{\text{Re } \rho} \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\alpha h_j \times \right. \\ & & & & \left. \times \left(\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\lambda}{c_p} - \frac{\rho}{\text{Sc } B_j} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\text{Re } \rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(q_2'' \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (6.35)$$

Матрицы q_1'' и q_2'' , входящие в (6.34), (6.35), получаются из аналогичных матриц q_1 и q_2 (5.29) заменой в последних λ на λ/c_p .

Подставляя в (6.24) выражение для вектора W в форме расщепления по координатам и физическим процессам (6.33), получим следующую систему уравнений, лежащую в основе рассматриваемой конечно-разностной схемы расщепления:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \sum_{p=1}^2 \Omega_p \mathbf{f} + \mathbf{Q} + \mathbf{H} = 0. \quad (6.36)$$

Для численного решения системы уравнений

$$W + Q + H = 0 \quad (6.37)$$

или, что то же самое, для нахождения стационарного решения системы (6.36), введем в расчетной области $D\{0 < x < x_{\text{вых}}, 0 < y < y_w\}$ конечно-разностную МАС-сетку (см. рис. 6.1).

Пусть τ^n — шаг интегрирования системы (6.36) по времени (в рассматриваемом случае — релаксационный параметр), а n — номер итерации («временного» слоя). Определим в соответствующих узлах МАС-сетки (см. п. 25.1) сеточные функции $\tilde{p}_h^n, u_h^n, v_h^n, h_h^n, (c_i)_h^n$ и т. д., а также $(N_h + 4)$ -мерную сеточную вектор-функцию $\mathbf{f} = [\tilde{p}_h^n, u_h^n, v_h^n, h_h^n, (c_i)_h^n]$. Тогда для численного интегрирования системы уравнений (6.36) можно построить следующую конечно-разностную схему расщепления по координатам и физическим процессам:

$$(E + \tau^n \Lambda_h^n) \xi^{n+1/3} = -\tau^n (W_h^n + Q_h^n + H_h^n), \quad (6.38.1)$$

$$(E + \tau^n \Omega_{1h}^n) \xi^{n+2/3} = \xi^{n+1/3}, \quad (6.38.2)$$

$$(E + \tau^n \Omega_{2h}^n) \xi^{n+1} = \xi^{n+2/3}, \quad (6.38.3)$$

$$f_h^{n+1} = f_h^n + \xi^{n+1}. \quad (6.38.4)$$

Здесь $\xi^{n+1/3}$, $\xi^{n+2/3}$ — вспомогательные $(N_h + 4)$ -мерные векторы, а $\xi^{n+1} = [\xi_p^{n+1}, \xi_u^{n+1}, \xi_v^{n+1}, \xi_h^{n+1}, \xi_{c_i}^{n+1}]$ — вектор невязок (приращений искомых функций на одной итерации), определяемый соотношением (6.38.4). Векторы W_h^n , H_h^n и Q_h^n аппроксимируют в узлах МАС-сетки векторы W , H и Q , а конечно-разностные матричные операторы Ω_{1h}^n и Ω_{2h}^n — дифференциальные матричные операторы Ω_1 и Ω_2 (6.34), (6.35). Матрица Λ_h^n в первом дробном шаге схемы (6.38.1) определяется соотношением

$$\Lambda_h^n \xi = \left[0, \frac{1}{Fr \rho} \left[-\frac{1}{c_p T} \xi_h + \sum_{j=1}^{N_h} \xi_{c_j} \left(\frac{h_j}{c_p T} - \frac{m}{m_j} \right) \right], \right. \\ \left. 0, 0, -\frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^{N_R} Da_s b_{hs} \xi_{c_h} \right]^T, \quad (6.39)$$

где значения $b_{hs} = \partial \dot{w}_{hs} / \partial c_h$ вычисляются по формуле (5.42).

После исключения в (6.38) дробных шагов получим следующую конечно-разностную схему типа универсального алгоритма [99]:

$$C_h^n \frac{f_h^{n+1} - f_h^n}{\tau^n} = - (W_h^n + Q_h^n + H_h^n), \quad (6.40)$$

$$C_h^n = (E + \tau^n \Lambda_h^n) \prod_{p=1}^2 (E + \tau^n \Omega_{ph}^n). \quad (6.41)$$

Из (6.40) видно, что при сходимости итераций, т. е. при $f_h^{n+1} \rightarrow f_h^n$ ($\xi^{n+1} \rightarrow 0$), данная схема, а следовательно, и эквивалентная ей схема (6.38) аппроксимируют рассматриваемую стационарную задачу (6.37) с тем же порядком точности, с которым вектор $(W_h^n + Q_h^n + H_h^n)$ аппроксимирует левую часть (6.37). Не останавливаясь подробно на специфических особенностях построения разностных аналогов Ω_p , W , Q и H , связанных с использованием МАС-сетки (эти особенности рассмотрены в предыдущем разделе), отметим только то, что, как и в схеме (6.1) — (6.5), все пространственные производные, входящие в (6.36), за исключением конвективных членов уравнений переноса, аппроксимируются в (6.38) симметричными разностями со вторым порядком точности, а конвективные члены — направленными двухточечными разностями «против потока» с первым порядком точности.

Разностные аналоги граничных условий к системе уравнений (6.36) формулируются относительно невязок основных переменных аналогично тому, как это делалось при построении схемы (5.40) (см. (5.48) — (5.50)) с использованием обычных для МАС-сетки приемов (см. раздел 25.1).

Рассмотрим далее коротко последовательность расчета с помощью схемы (6.38).

1. Расчет «правых частей». На этом этапе во всех внутренних точках области D вычисляются компоненты вектора $(W_h^n + Q_h^n + N_h^n)$ на n -й (известной) итерации. При этом рассчитываются коэффициенты переноса и теплофизические свойства смеси, определяются массовые скорости образования компонент в результате химических реакций $\dot{w}_{hs}$, а также формируются величины b_{hs} , необходимые для реализации первого дробного шага схемы (6.38.1). На этом же этапе определяются величины $(\delta J_h)_h^n$, входящие в вектор N_h^n . Для их вычисления используются разностные аналоги соотношений Стефана — Максвелла (2.31) на n -й итерации (временном слое).

2. Дробный шаг (6.38.1). Введение этого дробного шага в схему (6.38) обеспечивает частично неявную аппроксимацию химических источников членов в уравнениях переноса массы отдельных компонент смеси (6.22), а также члена $\frac{1}{\varepsilon_\rho \text{Fr}} \frac{\rho - 1}{\rho}$ в проекции уравнения переноса импульса на ось x (6.19). Этот дробный шаг реализуется с помощью расчетов по явным формулам.

3. Дробные шаги (6.38.2) — (6.38.3). Эти дробные шаги реализуются последовательно с использованием на каждом шаге скалярных трехточечных прогонок и расчетов по явным формулам.

4. По найденным значениям ξ^{n+1} с помощью уравнений (6.38.4) определяются поля основных переменных на новой $(n+1)$ -й итерации:

$$f_h^{n+1} = f_h^n + \xi^{n+1}. \quad (6.42)$$

5. С помощью критерия установления

$$\max_{D, 1 \leq k \leq N_k + 4} \left\{ \frac{1}{\tau^n} \left| \frac{(f_k)_h^{n+1} - (f_k)_h^n}{(f_k)_h^n} \right| \right\} \leq \varepsilon, \quad (6.43)$$

где ε — некоторая малая величина, значение которой выбирается таким образом, чтобы обеспечить требуемую точность искомого решения стационарной задачи (6.37), проверяется сходимость итерационного процесса.

Если (6.43) выполняется, то расчет прекращается. В противном случае вся описанная процедура повторяется, начиная с п. 1.

В заключение приведем некоторые данные [515], иллюстрирующие эффективность описанного релаксационного алгоритма решения стационарных задач динамики вязких газов и газовых смесей

на основе модели СДТ. На рис. 6.2 приведены зависимость от релаксационных параметров τ'' и A числа итераций N , необходимых для получения с помощью этого алгоритма стационарного решения задачи о течении однородного вязкого газа в круглой трубе, температура стенок которой в четыре раза превосходит температуру газа на входе в трубу ($\varepsilon_T = T_w/T^0 - 1 = 3$). Расчеты выполнены при значении числа Рейнольдса $Re_\tau = 500$ при задании на входе в трубу однородных профилей продольной составляющей вектора скорости и температуры ($u = 1$, $T = 1$ при $x = 0$) и нулевого значения поперечной составляющей вектора скорости ($v = 0$ при $x = 0$). В качестве начального приближения задавались однородные поля всех искомым функций, совпадающие с заданными значениями этих функций во входном сечении трубы.

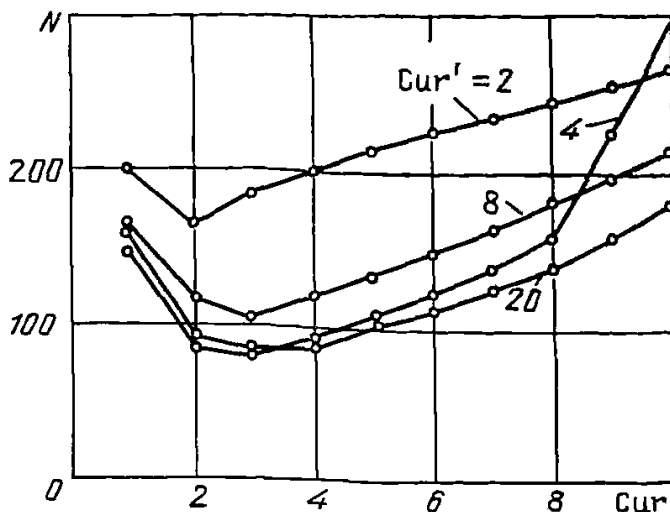


Рис. 6.2. Зависимость числа итераций, необходимого для получения стационарного решения, от релаксационных параметров конечно-разностной схемы

Комментируя эти данные, следует прежде всего отметить, что схема (6.38) сохраняет устойчивость по крайней мере вплоть до значений числа Куранта ($Cur = u_{\max} \tau'' / h_x$), равных 100, независимо от значения параметра A (или $Cur' = Cur/A$). Кроме того, зависимость N от Cur и Cur' является весьма слабой в широком диапазоне изменения этих параметров ($2 \leq Cur \leq 8$, $3 \leq Cur' \leq 20$), что исключает необходимость проведения предварительных численных экспериментов, направленных на подбор оптимальных значений Cur и Cur' , при использовании схемы (6.38) для расчетов различных типов стационарных дозвуковых течений. Наконец, число итераций, необходимое для получения решения с помощью схемы (6.38), оказывается сравнительно небольшим (порядка 100 в указанном диапазоне Cur и Cur'). В сочетании с тем, что эта схема реализуется скалярными трехточечными прогонками и расчетами по явным формулам, данное обстоятельство обеспечивает ее высокую экономичность. В частности, использование этой схемы позволяет примерно на порядок сократить затраты машинного времени по сравнению со схемой (6.1)–(6.5), ориентированной на расчет нестационарных течений в рамках модели СДТ. Таким образом, можно констатировать, что схема (6.38) является весьма эффективным инструментом для численных исследований стационарных течений на основе данной модели.

§ 26. Границы применимости приближенных моделей гипозвуковых течений

26.1. Модель СДТ. Объективная информация о границах применимости данной модели при численном моделировании различных типов дозвуковых внутренних течений может быть получена путем сопоставления решений типичных внутренних задач дозвуковой газовой динамики, полученных на основе полной системы

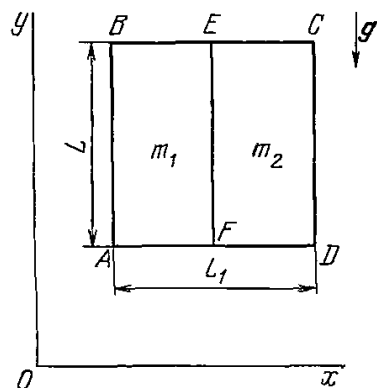


Рис. 6.3. Конфигурация расчетной области для задачи о нестационарной концентрационной естественной конвекции бинарной газовой смеси (задача о «вертикальных слоях»)

уравнений Навье — Стокса (2.2) — (2.9) в широком диапазоне изменения параметров M и ε_g (включая и малые их значения), с решениями тех же задач в рамках модели СДТ (последние, очевидно, не зависят от M и ε_g).

Указанное сопоставление выполнено для двух типов дозвуковых внутренних течений: нестационарной естественной конвекции бинарной газовой смеси в замкнутом объеме и стационарной вынужденной конвекции однородного вязкого газа в каналах.

26.1.1. Нестационарная естественная конвекция в замкнутом объеме [187]. В качестве примера течений данного класса рассмотрим естественно-конвективное течение, возникающее в цилиндрической полости квадратного сечения с непроницаемыми теплоизолированными стенками (см. рис. 6.3)

после удаления из нее вертикальной перегородки, слева и справа от которой в начальный момент времени покоятся химически инертные газы с молекулярными весами m_1 и m_2 соответственно (для определенности $m_2 > m_1$) при одинаковой температуре T^0 и давлении p^0 .

Расчет данного течения проводился в рамках двух математических моделей.

В первом случае для его описания использовалась полная система уравнений Навье — Стокса. При этом в качестве начальных условий задавались параметры, соответствующие гидростатическому равновесию газов в левой и правой частях полости, т. е. при $t = 0$

$$v = 0, \quad T = 1, \quad c_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5, \\ 1 & \text{при } 0,5 < x \leq 1, \end{cases} \quad (6.44)$$

$$c_2 = 1 - c_1, \quad p = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_m + 1} y\right) & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5, \\ \exp(-\varepsilon_g y) & \text{при } 0,5 < x \leq 1, \end{cases} \quad (6.45)$$

где $\varepsilon_g = \frac{gLm_2}{RT^0}$, $\varepsilon_m = \frac{m_2}{m_1} - 1$, а x и y — безразмерные декартовы

координаты (линейным масштабом служит высота области L , масштабом молекулярного веса — молекулярный вес тяжелого газа m_2 , а масштабом давления — давление на дне полости p^0).

В качестве граничных условий к системе уравнений Навье — Стокса на твердых непроницаемых теплоизолированных стенках области задавались условия прилипания для вектора скорости и равенства нулю теплового и диффузионного потоков для температуры и концентрации соответственно. В рассматриваемом случае бинарной газовой смеси без учета эффектов термо- и бародиффузии эти условия имеют вид

$$\mathbf{v}|_{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n}|_{\sigma} = 0, \quad \frac{\partial c_1}{\partial n}|_{\sigma} = 0, \quad (6.46)$$

где n — направление нормали к поверхности стенок σ , ограничивающих полость ABCD.

Для численного интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса с начальными и граничными условиями (6.44) — (6.46) использовался ICE-метод Харлоу и Амсдена [90].

В рамках модели СДТ рассматриваемое течение описывается системой уравнений (2.121), (2.123) — (2.129) (точнее, ее аналогом для естественноконвективных течений), использование которой является оправданным при достаточно малых значениях параметра гидростатической сжимаемости ε_g и произвольных конечных изменениях плотности в потоке. Из анализа этой системы непосредственно следует, что при заданных начальных и граничных условиях (температуры газов в начальный момент времени одинаковы, стенки полости теплоизолированы) химически замороженное течение газовой смеси ($Da_s = 0$) при $\varepsilon_g \ll 1$ является изотермическим (решение $T = 1$ удовлетворяет уравнению переноса энергии (2.125) с начальными и граничными условиями (6.44), (6.46)). Кроме того, из (6.11) следует, что при $T = 1$ и $Da_s = 0$ уровень статического давления в полости является постоянным, т. е. $p^*(t) \equiv 1$. Действительно, выражение (2.128) для вектора плотности теплового потока без учета диффузионного термоэффекта (последнее слабое в правой части (2.128)) при $T = 1$ принимает вид

$$\mathbf{q} = \frac{\text{Pr}}{\text{Sc}} \sum_{j=1}^{N_h} \mathbf{J}_j h_j. \quad (6.47)$$

Подставляя (6.47) в числитель (6.11) с учетом того, что при $T = \text{const}$ энтальпии отдельных компонент смеси h_j также постоянны, будем иметь

$$\frac{dp^*}{dt} = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N_h} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_j}{m_j} \right) d\Omega \int_{\Omega} \left[\frac{(\gamma-1)}{\gamma} \frac{1}{c_p m} - 1 \right] d\Omega, \quad (6.48)$$

откуда непосредственно вытекает, что $\dot{dp}^*/dt = 0$, а $p^* = \text{const} = 1$,

поскольку

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_j}{m_j} \right) d\Omega \equiv \int_{\sigma} \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{m_j} \mathbf{J}_j \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

в силу равенства нулю нормальных составляющих векторов диффузионных потоков компонент на стенках, ограничивающих объем ($\mathbf{J}_j \cdot \mathbf{n}|_{\sigma} = 0$). С учетом сделанных замечаний система уравнений (2.121), (2.123) — (2.126) для рассматриваемого частного случая концентрационной естественной конвекции бинарной химически инертной газовой смеси с произвольным отношением молекулярных весов (плотностей) компонент может быть представлена в следующей форме [182]:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{Ar} Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\rho \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\rho - \rho^*}{\varepsilon_m} \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{2}{\sqrt{Ar}} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathbf{v} \dot{\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\rho \frac{\partial c_1}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{Ar} Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\rho \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.51)$$

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon_m c_1 + 1}, \quad \rho^* = \frac{1}{\varepsilon_m c_1^* + 1}. \quad (6.52)$$

Отметим, что при получении (6.49) — (6.52) из общей системы уравнений СДТ для смешанной конвекции (2.121), (2.123) — (2.126) в качестве масштаба времени используется величина $t^0 = L/u^0$, а масштабом скорости служит величина $\sqrt{gL\varepsilon_m}$ (параметр $\varepsilon_m = (m_2 - m_1)/m_1$ полностью определяет в рассматриваемом случае степень неоднородности поля плотности и играет роль параметра ε_p в (2.14)). При таком выборе масштабов t^0 и u^0 числа Струхала и Фруда тождественно равны единице, а число Рейнольдса переходит в число Архимеда (см. (2.62), (2.64)). Величина c_1^* , определяемая как среднее значение концентрации легкого газа в полости, в рассматриваемом случае, очевидно, является константой. Наконец, при записи (6.49) — (6.52) безразмерные диффузионные потоки компонент смеси определяются по формуле

$$\mathbf{J}_1 = -\mathbf{J}_2 = -\rho \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}}, \quad (6.53)$$

которая непосредственно следует из закона Фика (1.46), если принять во внимание, что безразмерный коэффициент бинарной диффузии в рассматриваемых условиях (температура и уровень статического давления в полости постоянны) равен константе (единице).

В качестве начальных условий к системе уравнений (6.49) — (6.52) задаются параметры, соответствующие условиям равновесия газов слева и справа от перегородки, т. е. условия (6.44), (6.45) с той лишь разницей, что в рамках модели СДТ вместо статического давления p задается динамическое давление $\tilde{p}$, равное нулю в начальный момент времени, а в задании начальных условий по температуре в рассматриваемом изотермическом случае нет необходимости:

$$v = 0, \quad \tilde{p} = 0, \quad c_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq 0,5 \\ 1 & \text{при } 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{при } t = 0. \quad (6.54)$$

Граничными условиями к системе уравнений (6.49) — (6.52) служат условия прилипания и равенства нулю градиента концентрации легкого газа на твердых стенках (первое и третье из условий (6.46)).

Для численного интегрирования системы (6.49) — (6.52) используется модификация SMAC-метода, описанная в п. 25.1.

Не останавливаясь на анализе характера течения, развивающегося в объеме после удаления перегородки, и присущих ему закономерностей (эти вопросы подробно обсуждаются в [190, 191]), отметим только (см. рис. 6.4), что результаты расчетов, полученные на основе полной системы уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon_g < 0,01$,

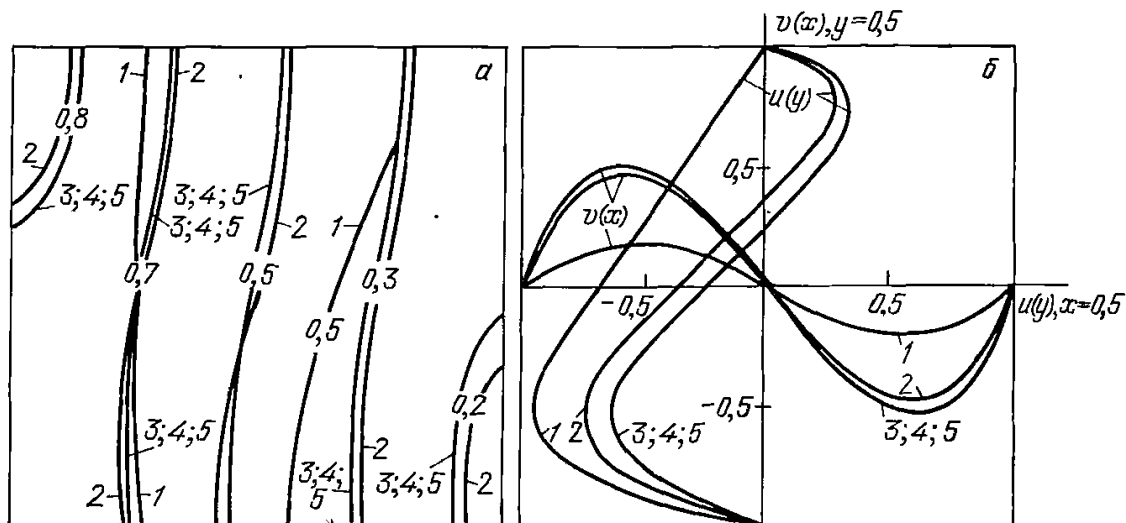


Рис. 6.4. Изолинии концентрации легкого газа (а) и профили скорости (б) в момент времени $t = 1,5$ при $Ag = 400$, $Sc = 1$, $\varepsilon_m = 1$, $L_1/L = 1$: 1 — $\varepsilon_g = 1$; 2 — 0,1; 3 — 0,01; 4 — 0,001; 5 — решение в рамках модели СДТ

практически совпадают с не зависящим от ε_g решением системы уравнений (6.49) — (6.52). С ростом ε_g погрешность, обусловленная использованием модели СДТ, естественно, увеличивается, однако вплоть до значений $\varepsilon_g = 0,05 \div 0,07$ ее величина не превышает 5 %.

26.1.2. Стационарная вынужденная конвекция в каналах. В качестве конкретных примеров течений данного класса рассмотрим

дозвуковое течение однородного вязкого газа в круглой трубе постоянного сечения с непроницаемыми и пористыми (при наличии вдува) стенками, а также течение в трубе с внезапным расширением.

При описании этих течений на основе полной системы уравнений Навье — Стокса в качестве граничных условий на непроницаемых стенках трубы использовались условия прилипания для вектора скорости и условия первого рода для температуры:

$$\mathbf{v}_w = 0, \quad T = T_w. \quad (6.55)$$

Для трубы с пористыми стенками при наличии вдува граничные условия для скорости и температуры задаются в форме

$$u_w = 0, \quad v_w = \frac{m_f}{\rho_w}, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \text{Re Pr } m_f c_{p \text{ cool}} (T_w - T_{\text{cool}}), \quad (6.56)$$

где u_w и v_w — осевая и радиальная составляющие вектора скорости, а $c_{p \text{ cool}}$ и T_{cool} — удельная теплоемкость вдуваемого газа и его температура на входе в пористую стенку соответственно.

Кроме физических граничных условий на твердых стенках (6.55), (6.56), для численного интегрирования полной системы уравнений Навье — Стокса, которое осуществлялось с помощью конечно-разностной схемы Брайли и Макдональда [146], необходимо привлечение некоторых дополнительных (вычислительных) граничных условий или граничных аппроксимаций (см. п. 5.2.3). При решении рассматриваемых задач в качестве таких граничных аппроксимаций на стенках трубы использовались односторонние разностные аналоги проекции уравнения переноса импульса (2.3) на радиальное направление.

На оси симметрии трубы используются условия симметрии

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (6.57)$$

где u и v — проекции скорости на осевое и радиальное направления соответственно.

Во входном сечении трубы во всех случаях задавался однородный профиль температуры, развитый (параболический) профиль осевой и нулевое значение радиальной составляющей вектора скорости

$$T = 1, \quad u = 2(1 - y^2), \quad v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad (6.58)$$

(масштабом скорости служит средняя скорость на входе в канал). Кроме того, во входном сечении используется мягкое граничное условие (граничная аппроксимация) для давления вида

$$\partial^2 p / \partial x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (6.59)$$

На выходе из трубы задавалось значение давления на стенке $(p_w)_{\text{вых}}$ и мягкие граничные условия вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}(y) = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_w &\text{ при } x = x_{\text{вых}}.\end{aligned}\quad (6.60)$$

В рамках модели СДТ неизотермическое течение однородного газа в канале описывается с помощью системы уравнений (2.122) — (2.129), которая в этом частном случае существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (6.61)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \dot{\mathbf{e}} \right) \right], \quad (6.62)$$

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\lambda}{c_p} \frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.63)$$

$$\rho = 1/T. \quad (6.64)$$

Граничные условия к этой системе на стенках трубы совпадают с условиями (6.55), (6.56), а на оси симметрии — с условиями (6.57) (отличие состоит лишь в том, что в данном случае условие $\partial p / \partial y = 0$ на оси симметрии не используется).

На входе в канал задаются условия (6.58), а на выходе из него мягкие условия вида

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial \rho v}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} = 0. \quad (6.65)$$

Необходимости в дополнительных граничных аппроксимациях на проницаемых границах расчетной области (таких, например, как условие (6.59) и последнее из условий (6.60)), а также в задании условий для давления на стенках трубы при использовании модели СДТ не возникает.

Для получения стационарного решения системы уравнений (6.61) — (6.64) с соответствующими граничными условиями используется конечно-разностный метод, описанный в п. 25.2.

Результаты выполненных расчетов представлены на рис. 6.5, из которого видно, что границы применимости модели СДТ по квадрату числа Маха оказываются примерно такими же, как и границы применимости модели по параметру ε_g при решении задач естественной конвекции: при $M^2 \leq 0,05$ — $0,07$ погрешность расчета локальных характеристик потока, обусловленная использованием модели СДТ, не превышает 5 %.

Таким образом, приведенные численные исследования позволяют сделать вывод о том, что при $M^2, \varepsilon_g \leq 0,05$ модель СДТ с точки зрения полноты описания практически не уступает системе урав-

нений Навье — Стокса. Справедливость этого вывода по отношению к другим типам дозвуковых внутренних течений подтверждают результаты расчетов, представленные на рис. 6.6, 6.7. На первом из них приведены данные по тепловой естественной конвекции однородного газа в замкнутой квадратной полости с изотермическими вертикальными и теплоизолированными горизонтальными стенками, полученные Г. М. Махвиладзе и С. Б. Щербаком [89] на основе

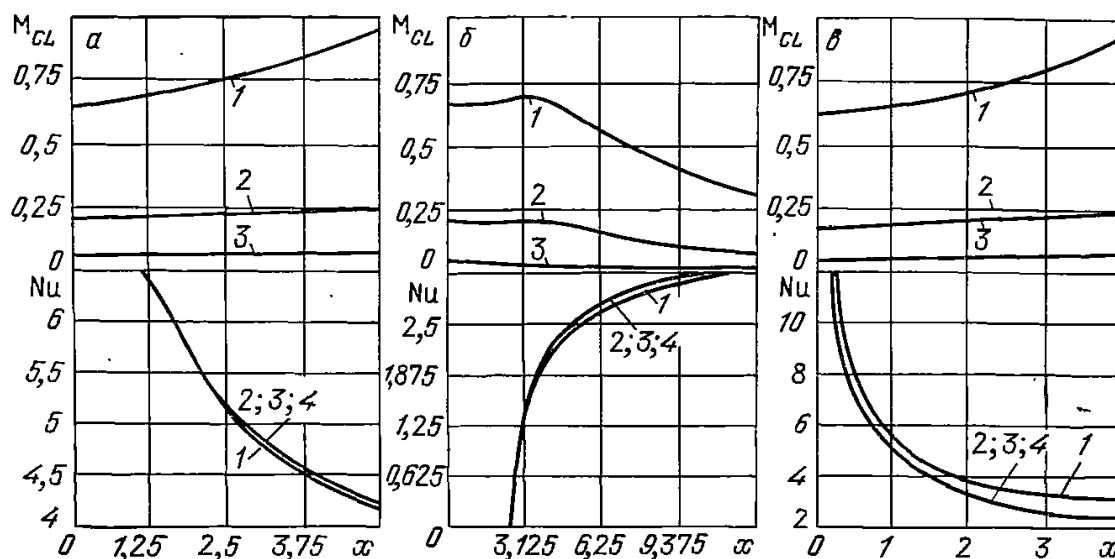


Рис. 6.5. Продольные распределения числа Маха на оси канала M_{CL} и числа Нуссельта Nu : а) течение в трубе постоянного сечения с непроницаемыми стенками при $Re_\tau = 100$, $T_w = 2$; б) течение в трубе с внезапным расширением в сечении $x = 2,4$ при $Re_\tau = 100$, $T_w = 2$ при $x > 2,4$ и $T_w = 1$ при $x \leq 2,4$; в) течение в трубе постоянного сечения с пористыми стенками при наличии вдува при $Re_\tau = 100$, $T_{cool} = 0,5$, $m_f = -0,1$; 1 — $M^2 = 0,1$; 2 — $0,01$; 3 — $0,001$; 4 — модель СДТ

полной системы уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon_g = 1/320$ и в работе [187] в рамках модели СДТ. На рис. 6.7 проведено сопоставление решений задачи о развитии тепловой конвекции в квадратной полости с обогреваемыми вертикальными и теплоизолированными горизонтальными стенками, полученных В. И. Полежаевым [516] на основе полной системы уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon_g = 0,05$ и в работе [186] при использовании модели СДТ. Для обеих задач результаты расчетов на основе уравнений Навье — Стокса и в рамках модели СДТ практически совпадают между собой, что находится в полном соответствии со сформулированными выше выводами о границах применимости последней по параметру ε_g .

Что касается вычислительных преимуществ модели СДТ, о которых говорилось в п. 6.2.2, то они оказываются весьма существенными: затраты машинного времени, необходимые для получения решений рассмотренных задач на основе полной системы уравнений Навье — Стокса, резко возрастают в области малых чисел

Маха и при $M^2 \leq 10^{-2}$ примерно на порядок превышают соответствующие затраты при использовании модели СДТ. Кроме того, уместно еще раз подчеркнуть, что при использовании этой модели не возникает каких-либо трудностей с постановкой граничных условий на проницаемых границах расчетной области, в то время как формулировка граничных условий и аппроксимаций (6.55) — (6.60) к полной системе уравнений Навье — Стокса потребовала проведения значительного объема предварительных численных экспериментов с другими наборами граничных условий, оказавшимися по

тем или иным причинам неудовлетворительными при решении рассмотренных задач о течении вязкого газа в каналах.

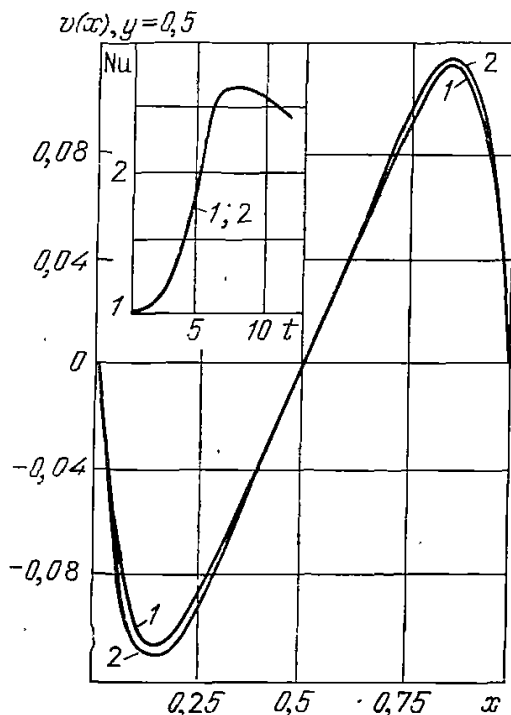


Рис. 6.6. Профиль вертикальной составляющей скорости и зависимость от времени числа Нуссельта для задачи о тепловой естественной конвекции в замкнутой области квадратного сечения с изотермическими боковыми и теплоизолированными верхней и нижней стенками; 1 — расчет на основе полной системы уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon_g = 1/320$ [89], 2 — расчет в рамках модели СДТ

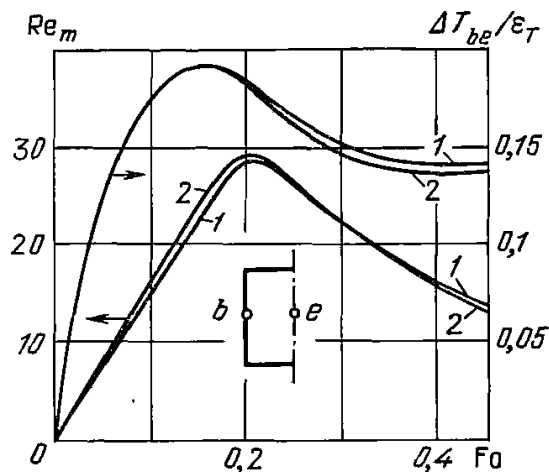


Рис. 6.7. Зависимость от времени (числа Фурье) параметра Re_m (числа Рейнольдса, построенного по максимальному значению вертикальной составляющей вектора скорости в объеме) и характерного перепада температуры для задачи о развитии тепловой естественной конвекции в замкнутой области квадратного сечения, обогреваемой сбоку, при $Gr = 10^5$, $\varepsilon_T = 5$; 1 — расчет на основе полной системы уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon_g = 0,05$ [544], 2 — расчет в рамках модели СДТ

26.2. Приближение Буссинеска. Как следует из вывода различных модификаций данной модели, приведенного в п. 6.2.1, границы ее применимости по параметру гидростатической сжимаемости и числу Маха при численном моделировании естественно- и смешанно-конвективных течений однородных газов и газовых смесей сов-

падают с рассмотренными выше границами применимости по этим параметрам модели СДТ. Однако, в отличие от модели СДТ, приближение Буссинеска имеет дополнительные ограничения по параметрам, характеризующим степень неоднородности полей концентраций, температуры и плотности в потоке, т. е. по параметрам ε_{c_i} , ε_T и ε_ρ (см. п. 6.2.1). Таким образом, модель СДТ может служить основой для изучения границ применимости приближения Буссинеска путем сопоставления решений, полученных в рамках этого приближения, с соответствующими решениями, полученными на основе модели СДТ при различных значениях указанных параметров. Данное обстоятельство является весьма важным, поскольку проведение аналогичных исследований на основе полной системы уравнений Навье — Стокса наталкивается, как уже отмечалось, на серьезные вычислительные трудности. Именно этим объясняется, в частности, тот факт, что, несмотря на чрезвычайно широкое использование приближения Буссинеска для численного моделирования естественно- и смешанно-конвективных течений однородных газов и газовых смесей, имеющиеся сведения о границах его применимости являются далеко не исчерпывающими. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих возможность получения таких сведений на основе модели СДТ.

26.2.1. Естественная конвекция в замкнутом объеме. Рассмотрим два простейших примера течений данного класса.

1. В замкнутой цилиндрической полости квадратного сечения покоится газ при температуре T^0 и давлении p^0 . В начальный момент времени правая стенка полости мгновенно приобретает температуру $T_1 > T^0$, а остальные стенки сохраняют начальную температуру T^0 .

2. В начальный момент времени к стенкам полости мгновенно подводится постоянный тепловой поток q_w^0 .

В обоих случаях требуется определить характеристики развивающегося в полости естественноконвективного течения.

В рамках модели СДТ это течение описывается системой уравнений (2.121), (2.111) — (2.117), которая в рассматриваемом случае течения однородного газа ($\varepsilon_{c_j} = 0$) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\varepsilon_T}{p^*} \left[\frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma c_p} - 1 \right) + \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr c_p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right], \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = \\ = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\rho - \rho^*}{\varepsilon_T} \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{2}{\sqrt{Gr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \dot{\varepsilon} \right) \right], \quad (6.67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} = \\ = - \frac{\rho c_p}{\varepsilon_T} \frac{d\tilde{T}^*}{dt} + \frac{\gamma-1}{\gamma} \left(\frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} + \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \rho^* \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} \right) + \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.68) \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{p^*}{\varepsilon_T \tilde{T} + T^*}, \quad (6.69)$$

$$T^* = p^*, \quad \rho^* = p^*/T^* = 1. \quad (6.70)$$

Выражение (6.18) для определения $p^*(t)$ также несколько упрощается и может быть представлено в форме

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{1}{\sqrt{Gr} Pr} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{c_p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} \right) d\Omega \int_{\Omega} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma c_p} - 1 \right) d\Omega. \quad (6.71)$$

В предположении о постоянстве удельной теплоемкости газа (6.71) принимает вид

$$\frac{dp^*}{dt} = - \frac{\gamma}{\sqrt{Gr} Pr} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.72)$$

Подставляя в (6.72) выражение для теплового потока (2.116), которое в рассматриваемом случае течения однородного газа имеет вид $\mathbf{q} = -\varepsilon_T \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}}$, и интегрируя полученное уравнение по времени с учетом того, что $p^* = 1$ при $t = 0$, получим

$$p^* = 1 + \frac{\gamma \varepsilon_T}{\sqrt{Gr} Pr} \int_0^t dt \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (6.73)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} = \frac{\gamma}{\sqrt{Gr} Pr} \int_{\Omega} \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.74)$$

В соответствии с (6.70) эти же выражения определяют величины T^* и dT^*/dt .

В качестве масштаба времени в системе уравнений (6.66) — (6.70) используется величина $t^0 = L/u^0$, где $u^0 = \sqrt{g L \varepsilon_T}$. Определение параметра ε_T , характеризующего степень неоднородности поля температуры в объеме, зависит от типа рассматриваемого течения (от граничных условий). Так, при анализе течения в объеме с изотермическими стенками (первая задача) ε_T определяется соотношением

$$\varepsilon_T = \frac{T_1}{T^0} - 1, \quad (6.75)$$

а при моделировании течения в обогреваемом объеме (вторая задача)

$$\varepsilon_T = \frac{q_w^0 L}{\lambda^0 T^0}. \quad (6.76)$$

Число Грасгофа Gr (аналог числа Архимеда для случая тепловой конвекции) и в том, и в другом случае определяется как

$$Gr = \frac{(\rho^0)^2 g L^3 \varepsilon_T}{(\mu^0)^2}. \quad (6.77)$$

В рамках приближения Буссинеска естественная конвекция газовой смеси описывается системой уравнений (2.80) — (2.87). Для рассматриваемого частного случая течения однородного газа эта система принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.78)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \tilde{T} \frac{\mathbf{g}}{g} - \frac{2}{\sqrt{\text{Gr}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\dot{S}), \quad (6.79)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{1}{\gamma \varepsilon_T} \frac{dp^*}{dt} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{1}{\sqrt{\text{Gr}} \text{Pr}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.80)$$

где

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{\gamma \varepsilon_T}{\sqrt{\text{Gr}} \text{Pr} \Omega} \int_{\sigma} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (6.81)$$

Для формулировки начальных и граничных условий к системам уравнений (6.66) — (6.70) и (6.78) — (6.80) необходимо вспомнить определение относительной безразмерной температуры $\tilde{T}$ (2.32). С учетом этого определения и выражения для $T^* = p^*$ (6.73) начальные условия для обеих рассматриваемых задач, соответствующие состоянию покоя газа в объеме при температуре T^0 и давлении p^0 , имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad \tilde{T} = 0, \quad \tilde{p} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (6.82)$$

С использованием определения параметра ε_T (6.75) граничные условия для первой задачи (изотермические стенки с температурами T^0 и T_1) могут быть записаны в форме

$$\mathbf{v} = 0,$$

$$\tilde{T} = \begin{cases} - \frac{\gamma}{\sqrt{\text{Gr}} \text{Pr} \Omega} \int_0^t dt \int_{\sigma} \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} d\sigma & \text{на левой, верхней и нижней стенках,} \\ 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\text{Gr}} \text{Pr} \Omega} \int_0^t dt \int_{\sigma} \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} d\sigma & \text{на правой стенке.} \end{cases} \quad (6.83)$$

Для второй задачи (задан тепловой поток на стенках области q_w^0) с использованием определения параметра ε_T (6.76) получим следующие граничные условия на стенках:

$$\mathbf{v} = 0, \quad \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} = 1, \quad (6.84)$$

где n — направление внешней нормали к стенкам.

На рис. 6.8, 6.9 представлены некоторые результаты решения первой из сформулированных выше задач на основе модели СДТ (6.66) — (6.70) при различных значениях параметра ε_T и фиксированном (равном 0) значении параметра $\varepsilon_g/\varepsilon_T$ и не зависящее от

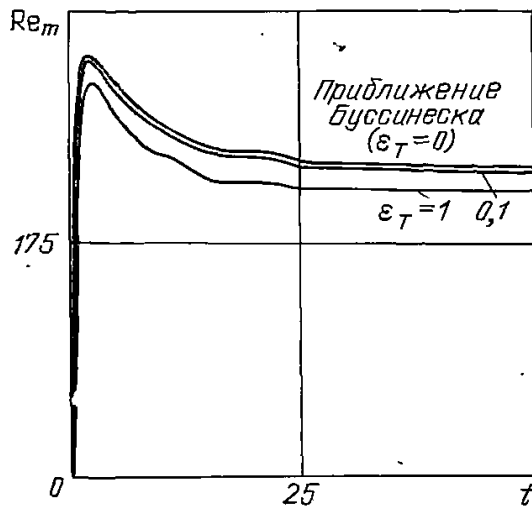


Рис. 6.8. Зависимость от времени параметра Re_m для задачи о развитии естественной конвекции в замкнутой области квадратного сечения при граничных условиях (6.83); $Gr = 4,9 \cdot 10^5$, $\varepsilon_g/\varepsilon_T = 0$

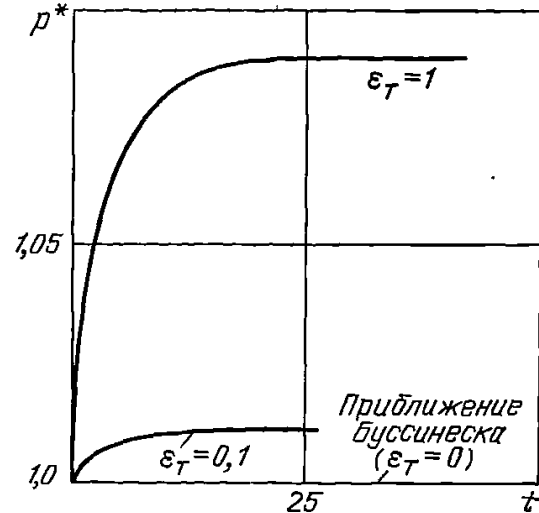


Рис. 6.9. Изменение во времени среднего уровня давления в объеме. Условия течения и обозначения те же, что и на рис. 6.8

ε_T решение этой задачи в рамках приближения Буссинеска (6.78) — (6.80) при $\varepsilon_g/\varepsilon_T = 0$.

Как видно из этих рисунков, использование приближения Буссинеска приводит к завышению интенсивности конвекции в объеме, и его применимость ограничена значениями параметра $\varepsilon_T \lesssim 0,1$ (в этом диапазоне изменения ε_T погрешность расчета локальных характеристик течения в рамках приближения Буссинеска не превышает 10 %)*. Следует также отметить, что в рамках приближения Буссинеска уровень давления в объеме предполагается постоянным (из (6.81) следует, что $p^* \rightarrow 1$ при $\varepsilon_T \rightarrow 0$). В действительности же (при конечных значениях ε_T) на нестационарной стадии процесса, когда $\int_{\sigma} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} \cdot n d\sigma \neq 0$, давление в объеме изменяется (см.

рис. 6.9), причем тем интенсивнее, чем выше значение ε_T .

Определенный интерес представляет оценка влияния на рассматриваемое течение значения параметра $\varepsilon_g/\varepsilon_T$. Поскольку применимость приближения Буссинеска и модели СДТ ограничена относительно малыми значениями параметра ε_g (порядка 0,05—0,07,

*) Близкие оценки границ применимости приближения Буссинеска при решении задач тепловой гравитационной конвекции получены Леонарди и Рейзисом [518] на основе полной системы уравнений Навье — Стокса.

см. п. 26.1), то в рамках этих моделей параметр $\varepsilon_g/\varepsilon_T$ может заметно отличаться от нуля лишь при малых значениях параметра ε_T (порядка 0,05 и менее), т. е. при очень слабой неизотермичности течения, когда, несмотря на малость ε_g , неравенство $\frac{\varepsilon_g}{\varepsilon_T} \ll 1$ не выполняется.

Исследование таких ситуаций может оказаться необходимым при анализе конвективной устойчивости, а также при оценке эффективности некоторых технологических процессов [517].

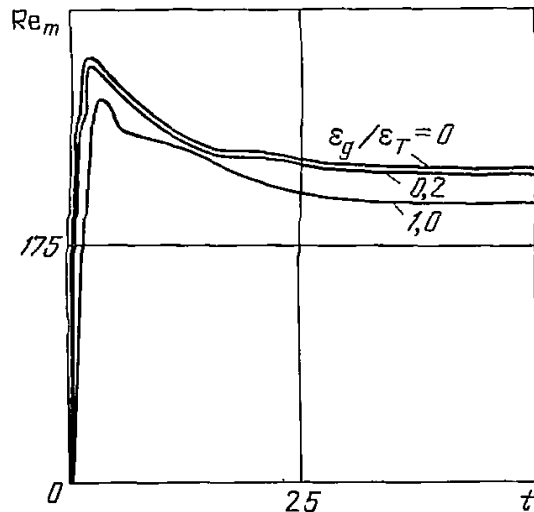


Рис. 6.10. Зависимость от времени параметра Re_m , рассчитанная в рамках приближения Буссинеска ($\varepsilon_T = 0$). Условия те же, что и на рис. 6.8

необходимым при анализе конвективной устойчивости, а также при оценке эффективности некоторых технологических процессов [517].

Из рис. 6.10, на котором представлены результаты решения рассматриваемой задачи в рамках приближения Буссинеска при различных значениях параметра $\varepsilon_g/\varepsilon_T$, видно, что допущение о незначительной роли эффектов, имеющих порядок $O(\varepsilon_g/\varepsilon_T)$, выполняется с приемлемой точностью лишь при $\varepsilon_g/\varepsilon_T \lesssim 0,2$.

Переходя к рассмотрению результатов решения второй из сформулированных в начале данного раздела задач, следует отметить, что в этом случае использование приближения Буссинеска приводит не только к заметным погрешностям, значения которых,

как и в первой задаче, растут с ростом ε_T (см. рис. 6.11, 6.12), но и к качественно неверному описанию асимптотического поведения течения при $t \rightarrow \infty$. Решение, полученное в рамках приближения Буссинеска, характеризуется тем, что при $t \rightarrow \infty$ в объеме устанавливается так называемый квазистационарный режим конвекции, т. е. стационарные поля скорости и градиента температуры, а при использовании модели СДТ конвекция в объеме затухает при $t \rightarrow \infty$ независимо от значения параметра ε_T (см. рис. 6.11). Указанное различие в асимптотическом поведении решений рассматриваемой задачи, полученных в рамках приближения Буссинеска и на основе модели СДТ, объясняется следующим образом.

Преобразуем член $\frac{\rho - \rho^*}{\varepsilon_T} \frac{g}{g}$ в правой части уравнения переноса импульса в модели СДТ (6.67), характеризующий изменение импульса под действием выталкивающей силы, используя уравнение состояния (6.69) и выражения для T^* (6.70), (6.73) с учетом второго из граничных условий (6.84). В результате будем иметь:

$$\frac{1}{\varepsilon_T} (\rho - \rho^*) \frac{g}{g} \equiv - \tilde{T} \frac{g}{g} \left(1 + \varepsilon_T \tilde{T} + \varepsilon_T \frac{\gamma \sigma}{\sqrt{Gr} Pr \Omega} t \right). \quad (6.85)$$

Из (6.85) видно, что при любых $\varepsilon_T > 0$ этот член стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, что и приводит к затуханию конвекции в объеме при использовании для описания течения модели СДТ*).

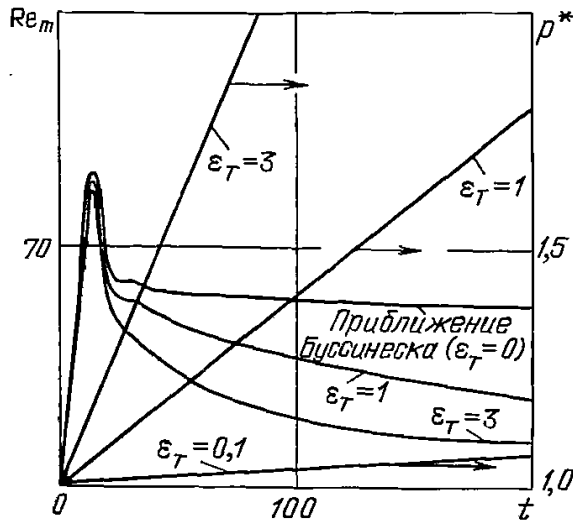


Рис. 6.11. Зависимость от времени параметра Re_m и среднего уровня давления в объеме для задачи о развитии естественной конвекции в равномерно обогреваемой замкнутой области квадратного сечения при $Gr = 4,9 \cdot 10^5$

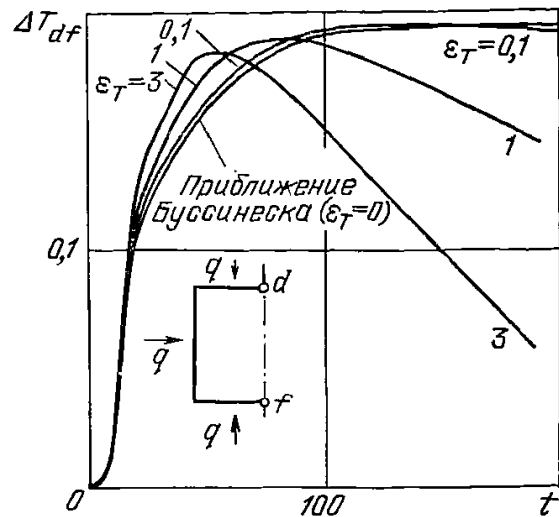


Рис. 6.12. Зависимость от времени характерного перепада температуры. Условия течения и обозначения те же, что и на рис. 6.11

С другой стороны, из анализа (6.85) можно заключить, что предельный переход при $\varepsilon_T \rightarrow 0$ в правой части (6.67), который осуществляется при выводе уравнений Буссинеска и приводит к тому, что член с выталкивающей силой принимает вид $-\tilde{T}g/g$ (см. уравнение (6.79)), т. е. остается конечным независимо от t , является некорректным при $t \rightarrow \infty$. Именно это и является причиной неправильного асимптотического поведения решения при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, при решении задач рассматриваемого типа, т. е. задач, в которых интеграл в правой части (6.73) стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$, необходимо иметь в виду, что использование приближения Буссинеска даже при малых значениях ε_T является оправданным лишь на некотором ограниченном сверху временном отрезке, для которого выполняется неравенство **)

$$\frac{\gamma \varepsilon_T}{\sqrt{Gr} Pr \Omega} \int_0^t dt \int_{\sigma} \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial n} \cdot n d\sigma \ll 1. \quad (6.86)$$

*) Такое же поведение течения при $t \rightarrow \infty$ имеет место и при решении задач рассматриваемого типа на основе полной системы уравнений Навье — Стокса [516].

**) Некоторые другие недостатки приближения Буссинеска, проявляющиеся при решении внутренних задач естественной конвекции однородных газов и газовых смесей, обсуждаются в работах [182, 186, 187, 189].

26.2.2. Смешанная конвекция бинарной газовой смеси. В качестве примера, иллюстрирующего применение модели СДТ для оценки границ применимости приближения Буссинеска при численном моделировании течений данного класса, рассмотрим следующую задачу.

Цилиндрическая полость прямоугольного сечения ABCD с теплоизолированными стенками заполнена покоящимся газом с молекулярным весом m_2 при температуре T^0 и давлении p^0 (см. рис. 6.13). В начальный момент времени через щель ad, расположенную в нижней стенке полости, со скоростью v_1^0 начинает поступать другой газ, молекулярный вес которого m_1 , а температура T^0 . Одновременно через щель ab в левой боковой стенке со скоростью v_2^0 в область подается тот же газ, который заполнял ее в начальный момент времени. Через щель cd образующаяся в полости смесь выводится в окружающее пространство. Газы m_1 и m_2 предполагаются химически инертными.

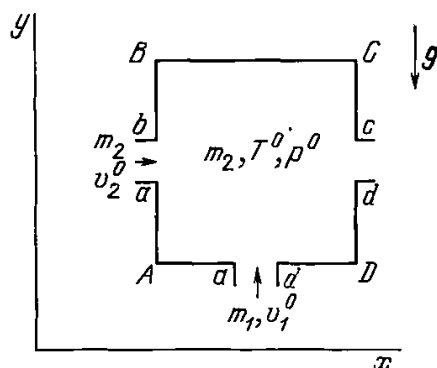


Рис. 6.13. Конфигурация расчетной области для задачи о смешанной конвекции однородного газа в прямоугольной области с подводящими и отводящими каналами

Требуется рассчитать характеристики развивающегося в полости течения. Как в рамках приближения Буссинеска, так и в рамках модели СДТ данное течение, так же как и естественноконвективное течение, рассмотренное в п. 26.2.1, является изотермическим. С учетом этого, а также принимая во внимание постоянство среднего уровня давления в объеме (он равен начальному давлению p^0 , а $p^* = 1$) и бинарность рассматриваемой смеси (безразмерные диффузионные потоки компонентов определяются по формулам (6.53)), общие уравнения, описывающие смешанную конвекцию газовой смеси в рамках модели СДТ (2.121), (2.111) — (2.117), могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = \frac{\varepsilon_m}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\rho \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.87)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\rho - 1}{\varepsilon_m \text{Fr}} \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[\mu \left(\dot{S} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \mathbf{e} \right) \right], \quad (6.88)$$

$$\rho \frac{\partial c_1}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{\text{Re Sc}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\rho \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} \right), \quad (6.89)$$

$$\rho = m = \frac{1}{\varepsilon_m c_1 + 1}. \quad (6.90)$$

При записи системы уравнений (6.87) — (6.90), как и во всех предыдущих случаях, в качестве масштаба времени используется величина $t^0 = L/u^0 = L/v_2^0$, так что $Sh = 1$. Кроме того, характерный уровень концентрации легкого газа $c_1^*(t)$ принят равным нулю, а ее характерный перепад ε_{c_1} (см. 2.33) — единице. При этом величина $\tilde{c}_1$ оказывается тождественно равной концентрации легкого газа ($\tilde{c}_1 \equiv c_1$).

Систему уравнений, описывающую рассматриваемое течение в приближении Буссинеска, легко получить из системы (6.87) — (6.90), переходя в ней к пределу при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ *). Совершая указанный предельный переход, будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (6.91)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{v} = - \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{c_1}{Fr} \frac{\mathbf{g}}{g} + \frac{2}{Re} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot (\dot{S}), \quad (6.92)$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{Re Sc} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\partial c_1}{\partial \mathbf{r}} \right). \quad (6.93)$$

Начальные условия к системам уравнений (6.87) — (6.90) и (6.91) — (6.93) соответствуют состоянию покоя тяжелого газа в полости $ABCD$ и имеют вид

$$\mathbf{v} = 0, \quad \tilde{p} = 0, \quad c_1 = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (6.94)$$

В качестве граничных условий на твердых стенках используются условия прилипания для скорости и отсутствия диффузионных потоков компонент для концентраций, т. е.

$$\mathbf{v}_w = 0, \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial n} \right|_w = 0. \quad (6.95)$$

На входных проницаемых границах задаются однородные профили нормальной и нулевые значения тангенциальной составляющих вектора скорости, концентрация легкого газа на отрезке ad полагается равной единице, а на отрезке ab — нулю, т. е.:

$$u_{ab} = 1, \quad v_{ab} = 0, \quad u_{ad} = 0, \quad v_{ad} = v_1^0/v_2^0, \quad (6.96)$$

$$(c_1)_{ab} = 0, \quad (c_1)_{ad} = 1$$

(напомним, что масштабом скорости служит скорость подачи в полость тяжелого газа v_2^0).

*) Система уравнений (2.52) — (2.60), описывающая смешанно-конвективные течения газовых смесей в приближении Буссинеска, в рассматриваемом случае использована быть не может, так как она получена в предположении о малости параметров ε_{c_i} для произвольных значений ε_m .

На выходной проницаемой границе (на отрезке cd) для всех переменных используются мягкие граничные условия вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial c_1}{\partial x} = 0. \quad (6.97)$$

Типичные результаты решения сформулированной задачи, полученные на основе модели СДТ (система уравнений (6.87)–(6.90)) при различных значениях ε_m и в рамках приближения Буссинеска (система уравнений (6.91)–(6.93)), представлены на рис. 6.14 в виде зависимости относительного объема легкого газа в области

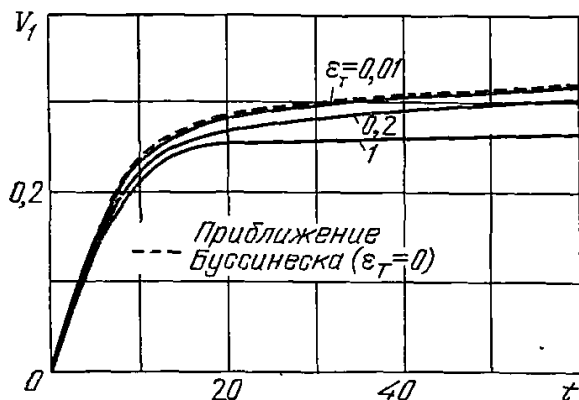


Рис. 6.14. Зависимость от времени относительного объемного содержания легкого газа в объеме при $Re = 300$, $Sc = 1$, $Fr = 0,5$, $v_1^0/v_2^0 = 1$

(V_1) от времени. Сопоставление различных кривых на этом рисунке позволяет судить о границах применимости приближения Буссинеска по параметру ε_m при численном моделировании смешанно-конвективных течений рассматриваемого типа. Видно, что использование этого приближения является оправданным лишь при $\varepsilon_m \ll 0,1$, т. е. в том же диапазоне изменения степени пространственной неоднородности в потоке, что и при анализе рассмотренных выше естественно-

конвективных течений однородного газа в замкнутых объемах.

Аналогичные оценки границ применимости приближения Буссинеска по параметру ε_m получены на основе модели СДТ для концентрационной естественной конвекции бинарной газовой смеси в замкнутом объеме Д. А. Никулиным [189].

Таким образом, численные исследования границ применимости приближения Буссинеска для описания различных типов естественно- и смешанно-конвективных течений однородных газов и газовых смесей, выполненные в настоящее время на основе модели СДТ, свидетельствуют о том, что использование приближения Буссинеска является достаточно обоснованным только в тех случаях, когда пространственные неоднородности плотности в потоке не превышают 10 %. В этой связи преимущества модели СДТ свободной от указанных ограничений и практически не уступающей приближению Буссинеска с точки зрения простоты численной реализации приобретают особенно важное значение.

Как отмечалось в п. 6.2.3, опыт практического использования модели СДТ пока сравнительно невелик. Тем не менее на основе этой модели уже выполнен ряд исследований, результаты которых позволяют вполне однозначно судить о ее возможностях. Так, в работах [183, 190, 191] проведены широкие численные исследования

двумерных, а в [192] — трехмерных нестационарных естественно-конвективных течений бинарных газовых смесей с произвольным отношением молекулярных весов компонент в замкнутых теплоизолированных объемах. В результате выявлены и классифицированы различные режимы таких течений и проанализированы их основные закономерности. В качестве примера на рис. 6.15 представлены не-

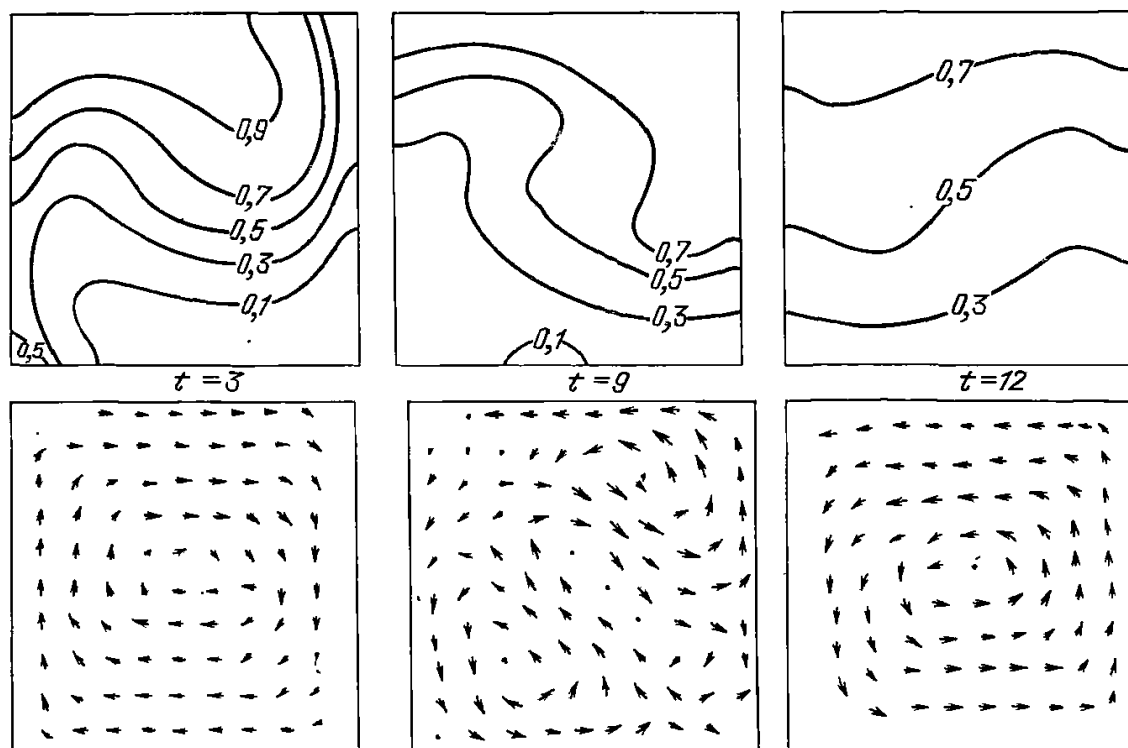


Рис. 6.15. Развитие во времени полей концентрации легкого газа и вектора скорости для задачи о «вертикальных слоях» (см. схему на рис. 6.3) при $At = 1,6 \cdot 10^5$, $Sc = 1$, $\epsilon_m = 1$, $L_1/L = 1$, $L_3/L \rightarrow \infty$

которые результаты расчетов «многоциркуляционного» режима течения, полученные в [190] при решении описанной в п. 26.1.1 задачи о двумерной нестационарной концентрационной конвекции в прямоугольной области, а на рис. 6.16 — результаты расчета того же течения в рамках трехмерной постановки задачи, полученные в [192]. Расчеты трехмерной тепловой естественной конвекции в объеме, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, на основе модели СДТ выполнены в работе [195]. В работе [186] на основе этой модели исследованы особенности развития конвективных процессов в замкнутых неадиабатических объемах. При этом показано, в частности, что даже в условиях полной невесомости в таких объемах может возникать движение заметной интенсивности (см. рис. 6.17), которое принципиально не может быть описано в рамках приближения Буссинеска. Проанализировано также влияние на характеристики течений данного класса термической диссоциации газа в объеме (на рис. 6.18—6.20 представлена картина

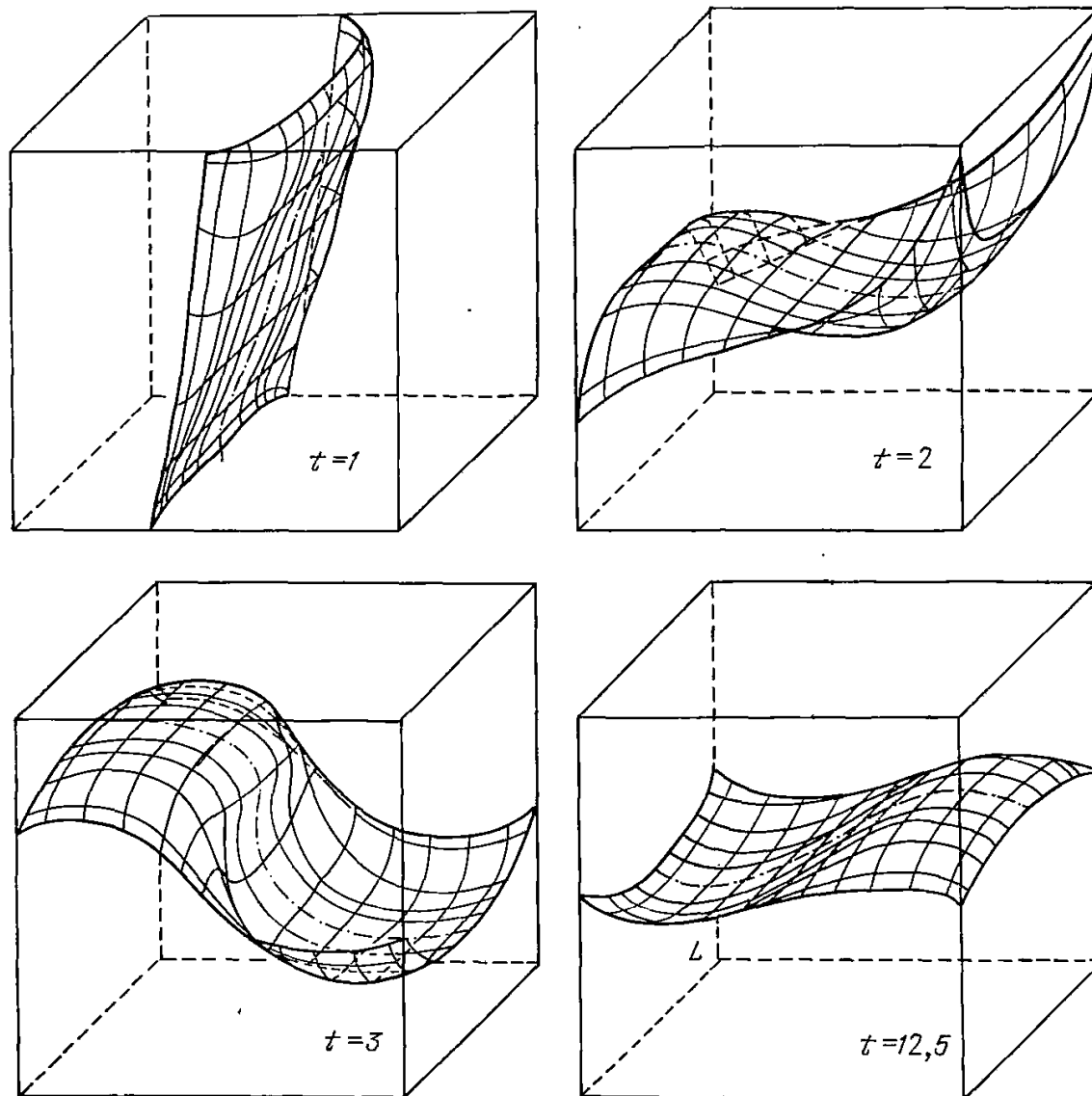


Рис. 6.16. Положение изоповерхности концентрации легкого газа $C = 0,5$ в различные моменты времени при тех же условиях течения, что и на рис. 6.15, но в рамках трехмерной постановки задачи ($L_3/L = 1$)

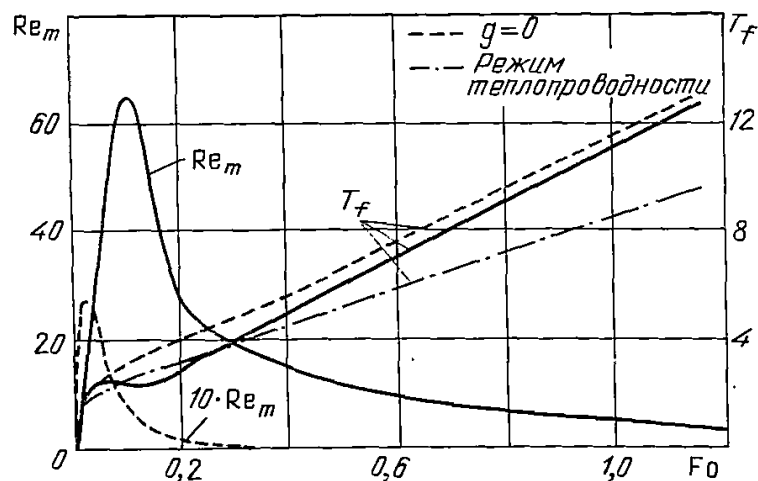


Рис. 6.17. Зависимость от времени параметра Re_m и температуры середины нижней стенки равномерно обогреваемой области прямоугольного сечения (см. схему на рис. 6.12) при $Gr = 4,9 \cdot 10^5$, $\epsilon_T = 10$

развития конвекции неравновесно диссоциирующего двухатомного газа в обогреваемой области квадратного сечения, а на рис. 6.21 показано влияние диссоциации на характер зависимости от времени среднего уровня давления в объеме).

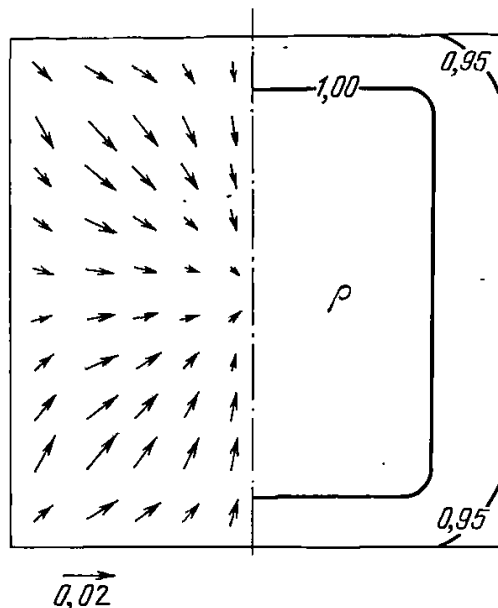


Рис. 6.18. Поле вектора скорости и изолинии плотности смеси в равномерно обогреваемой области прямоугольного сечения, заполненной диссоциирующим двухатомным газом (кислородом), в момент времени $t = 0,2$ при $Ag = 4,9 \cdot 10^5$, $\varepsilon_T = 10$

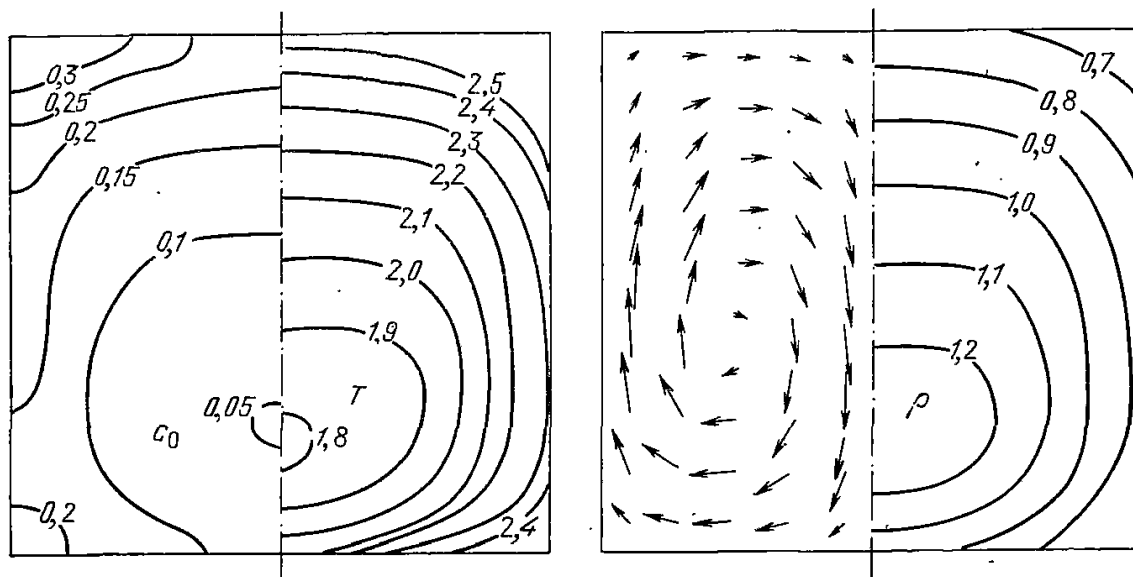


Рис. 6.19. Изолинии концентрации атомарного кислорода (C_0), температуры (T), поле вектора скорости и изолинии плотности (ρ) в момент времени $t = 15$. Условия течения те же, что и на рис. 6.18

В ряде работ модель СДТ использовалась для изучения процессов смешанной конвекции. В частности, в работах [193, 194, 196, 197, 198, 519] на ее основе исследованы различные типы смешанно-

конвективных течений однородного газа в плоских каналах, а в работах [184, 185] — течений бинарных газовых смесей в областях с подводящими и отводящими каналами (см. схему на рис. 6.13).

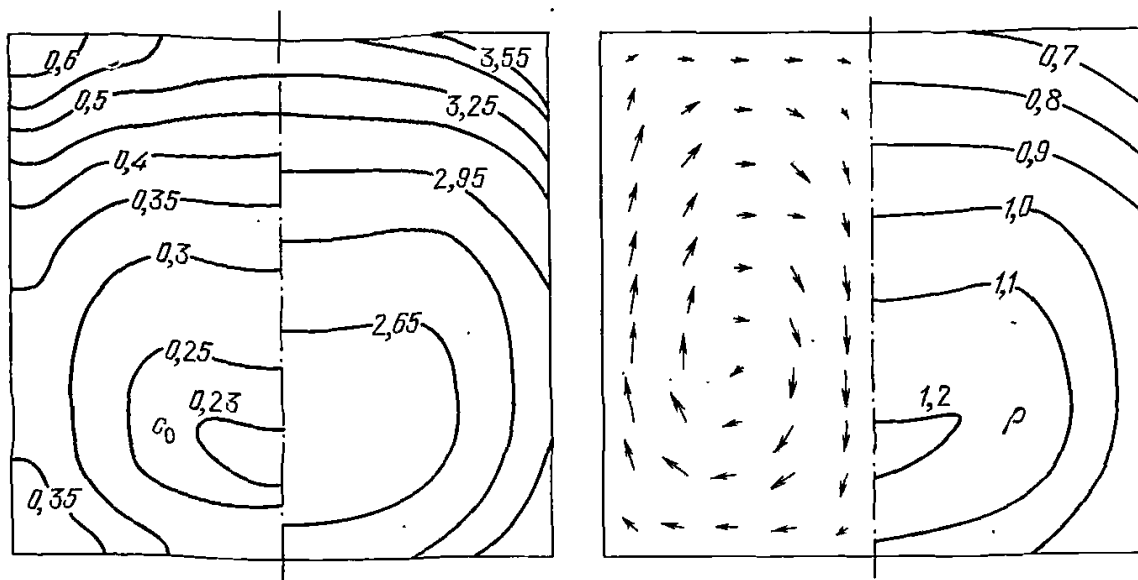


Рис. 6.20. То же, что и на рис. 6.19 в момент времени $t = 30$

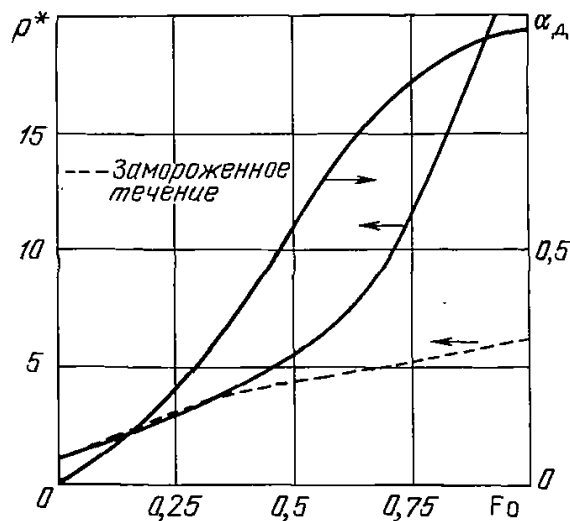


Рис. 6.21. Зависимость от времени среднего уровня давления в объеме (p^*) и среднemasсовой степени диссоциации кислорода (α_d). Условия течения те же, что и на рис. 6.18

В последнем случае, наряду с режимами конвекции, характеризующимися установлением при $t \rightarrow \infty$ некоторого стационарного режима течения (некоторые результаты расчетов таких режимов приведены на рис. 6.14), были обнаружены и проанализированы автоколебательные режимы конвекции; результаты расчетов одного из них представлены на рис. 6.22, 6.23.

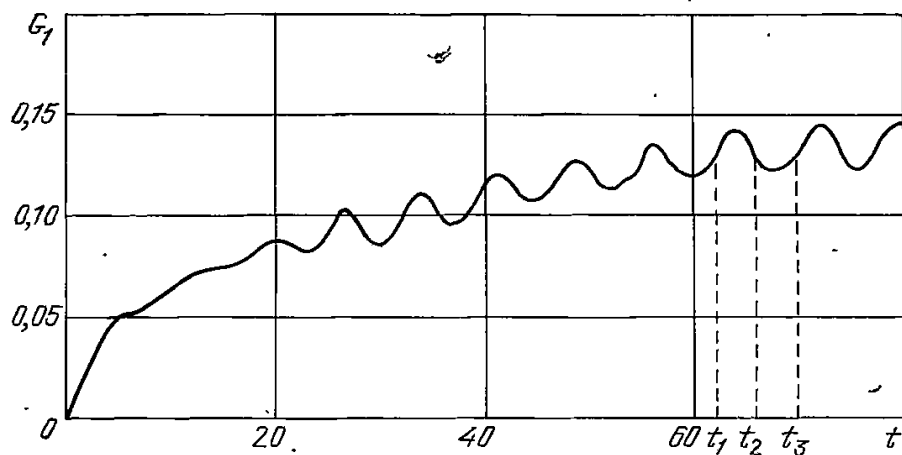


Рис. 6.22. Зависимость относительного массосодержания легкого газа в объеме от времени при $Re = 300$, $Fr = 0,5$, $Sc = 1$, $\epsilon_m = 1$, $v_1^0/v_2^0 = 0,3$

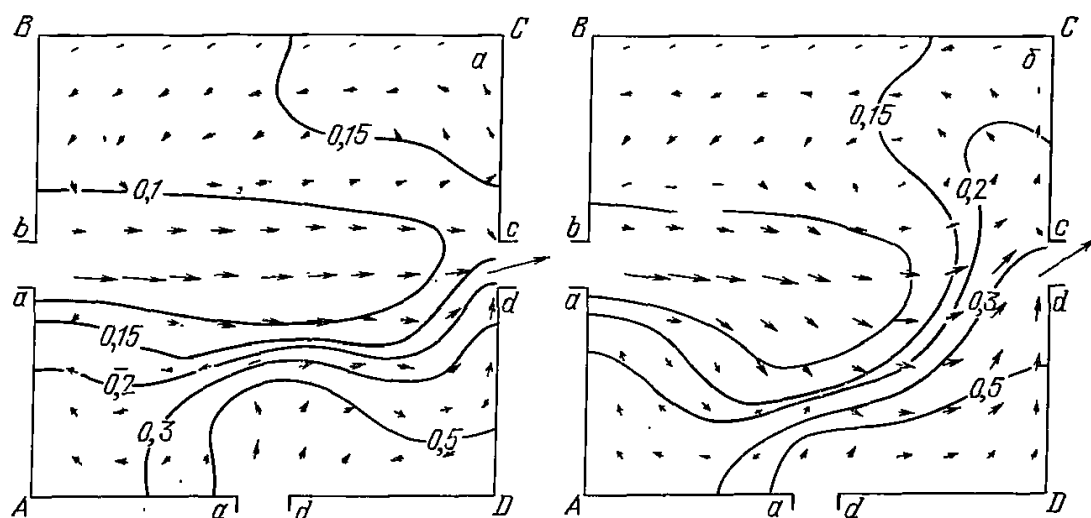


Рис. 6.23. Поля вектора скорости и изолинии концентрации легкого газа в объеме в моменты времени $t_1 = 62$ (а) и $t_2 = 66$ (б). Условия течения те же, что и на рис. 6.22

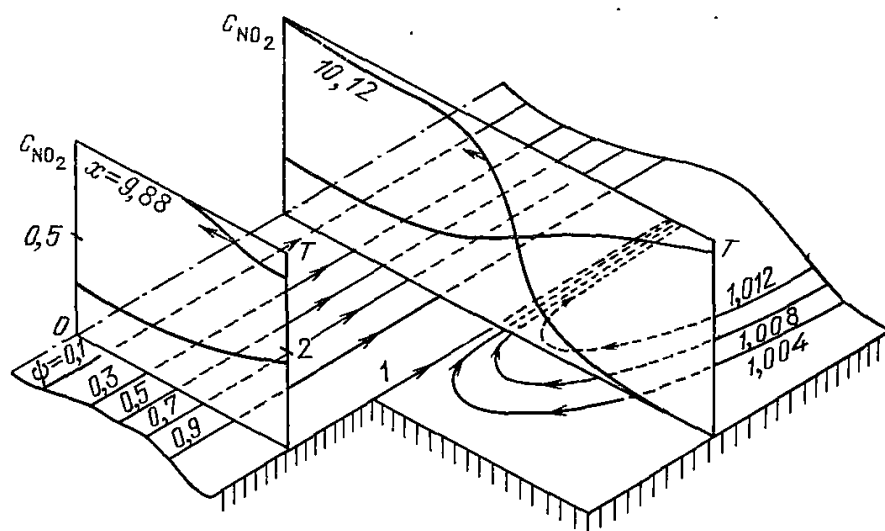


Рис. 6.24. Изолинии функции тока (Ψ), профили температуры (T) и концентрации двуоксида азота (C_{NO_2}) в круглой обогреваемой трубе с внезапным расширением (фрагмент течения в окрестности места изменения площади поперечного сечения трубы) при $Re = 500$, $q_w = 4$

Наконец, в работах [167, 168] модель СДТ в сочетании с конечно-разностным методом, описанным в п. 25.2 данной главы, с успехом использовалась для расчета вынужденной конвекции неравновесно диссоциирующей двуокиси азота в обогреваемых трубах с резким изменением площади поперечного сечения (результаты расчетов одного из рассмотренных режимов течения приведены на рис. 6.24).

Таким образом, на основании накопленного опыта можно констатировать, что модель СДТ является эффективным инструментом исследования широкого круга дозвуковых газовых потоков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
2. Фердигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах.— М.: Мир, 1976.
3. Тирский Г. А. Гидродинамическое описание химически равновесных течений частично ионизированных неидеальных смесей газов // Некоторые вопросы механики сплошной среды.— М.: МГУ, 1978.— С. 114—143.
4. Колесников А. Ф., Тирский Г. А. Уравнения гидродинамики для частично ионизированных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях // Молекулярная газодинамика.— М.: МГУ, 1982.— С. 20—44.
5. Герасимов Г. Я. К теории релаксационного давления в диссоциирующем газе // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидк. и газа.— 1978.— № 2.— С. 101—107.
6. Герасимов Г. Я. Теплопроводность частично ионизированного водорода // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидк. и газа.— 1978.— № 1.— С. 98—103.
7. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В., Тирский Г. А. Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техн. Сер. Механ. жидк. и газа.— М.: ВИНТИ, 1985.— Т. 19.— С. 3—85.
8. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. Изд. 2-е.— М.: Наука, 1982.
9. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория процессов переноса в газах.— М.: ИЛ, 1960.
10. Коган М. Н. Динамика разреженного газа.— М.: Наука, 1967.
11. Curtiss C. F., Hirschfelder J. O. Transport properties of multicomponent gas mixtures // J. Chem. Phys.— 1949.— V. 17, N 6.— P. 550—555.
12. Curtiss C. F. Symmetric gaseous diffusion coefficients // J. Chem. Phys.— 1968.— V. 49, N 7.
13. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— Изд. 6-е, перераб.— М.: Наука, 1987.
14. Vehla R. A. Estimated viscosities and thermal conductivities of gases at high temperature // NASA TR.— 1964.— R-132.
15. Анфимов Н. А. Ламинарный пограничный слой в многокомпонентной смеси газов // Изв. АН СССР. Сер. Механ. и машиностр.— 1962.— № 1.— С. 25—31.
16. Wilke C. R. A viscosity equation for gas mixtures // J. Chem. Phys.— 1950.— V. 18, N 4.— P. 517—522.
17. Бредшнайдер Ст. Свойства газов и жидкостей.— М.— Л.: Химия, 1966.

18. Гурвич Л. В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Т. 2.— М.: АН СССР, 1962.
19. Щетняков Е. С. Физика горения газов.— М.: Наука, 1965.
20. Muckenfuss C., Curtiss C. F. Thermal conductivity of multi-component gas mixtures // J. Chem. Phys.— 1958.— V. 29.— P. 1273.
21. Mason E. A., Saxena S. C. Approximate formula for the conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids.— 1958.— V. 1, N 5.— P. 361—369.
22. Гиршфельдер Дж. Теплопроводность в многоатомных и электронно-возбужденных газах // Проблемы движения головной части ракет дальнего действия.— М.: ИЛ, 1959.
23. Годнев И. В. Вычисление термодинамических функций по молекулярным данным.— М.: Гостехиздат, 1956.
24. Глестон С. Теоретическая химия.— М.: ИЛ, 1950.
25. Кондратьев В. Н. Кинетика химических газовых реакций.— М.: АН СССР, 1958.
26. Захарьевский М. С. Кинетика химических реакций.— Л.: ЛГУ, 1959.
27. Глестон С., Лейдлер К., Эйринг Г. Теория абсолютных скоростей реакций.— М.: ИЛ, 1948.
28. Герни Дж. П. Общие соотношения для поверхностных каталитических реакций // Ракетная техника и космонавтика.— 1966.— Т. 4, № 7.— С. 198—199.
29. Wilke C. R. Diffusional properties of multicomponent gases // Chem. Eng. Progr.— 1950.— V. 46, N 2.— P. 95—104.
30. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред.— М.: Наука, 1984.
31. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики.— Новосибирск: Наука, 1981.
32. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.
33. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1987.
34. Тирский Г. А. Условия на поверхности сильного разрыва в многокомпонентных смесях // Прикл. мат. и механ.— 1961.— Т. 25, № 2.— С. 196—208.
35. Овсянников В. М., Тирский Г. А. Разрушение осесимметричного тела вращения из материала сложного состава в потоке диссоциированного и частично ионизированного воздуха // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидк. и газа.— 1968.— № 2.— С. 100—110.
36. Сулов О. Н., Тирский Г. А., Щенников В. В. Описание химически равновесных течений многокомпонентных ионизованных смесей в рамках уравнений Навье — Стокса и Прандтля // Ж. прикл. мех. и техн. физ.— 1971.— № 1.— С. 73—89.
37. Гришин А. М., Фомин В. М. Нестационарные и сопряженные задачи механики реагирующих сред.— Новосибирск: Наука, 1984.
38. Sills J. A. Transformation of infinite regions and their application to flow problems // AIAA J.— 1969.— V. 7, N 1.— P. 137—144.
39. Olinger J., Sundström A. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics // SIAM J. Appl. Math.— 1978.— V. 35.— P. 419—446.
40. Hedström G. Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems // J. Comput. Phys.— 1979.— V. 30, N 2.— P. 222—237.
41. Bayliss A., Turkel E. Outflow boundary conditions for fluid dynamics // SIAM J. Sci. Statis. Comput.— 1982.— V. 3, N 2.— P. 250—259.
42. Bayliss A., Turkel E. Far-field boundary conditions for compressible flows // J. Comput. Phys.— 1982.— V. 48, N 2.— P. 182—189.
43. Gustafsson B., Kreiss H. O. Boundary conditions for time dependent problems with an artificial boundary // J. Comput. Phys.— 1979.— V. 30, N 3.— P. 333—351.

44. Beam R. M., Warming R. F., Yee H. C. Stability analysis of numerical boundary conditions and implicit difference approximations for hyperbolic equations // J. Comput. Phys.— 1982.— V. 48, N 2.— P. 200—222.
45. Thomas P. D. Boundary conditions for implicit solutions to the compressible Navier — Stokes equations in infinite computational domains // AIAA Comput. Fluid Dyn. Conf., Williamsburg, Va., 1979.— New York, N. Y., s. a.— P. 14—26.
46. Федорченко А. Т. Модели проницаемых границ для нестационарных задач газовой динамики // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 4.— С. 826—830.
47. Федорченко А. Т. О задачах численного моделирования нестационарных пространственных течений вязкого газа в соплах // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1982.— Т. 22, № 1.— С. 178—196.
48. Blottner F. G. Influence of boundary approximations and conditions on finite-difference solutions // J. Comput. Phys.— 1982.— V. 48, N 2.— P. 246—269.
49. Yee H. C., Beam R. M., Warming R. F. Boundary approximations for implicit schemes for one-dimensional inviscid equations of gasdynamics // AIAA J.— 1982.— V. 20, N 9.— P. 1203—1211.
50. Gustafsson B. The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems // Math. Comput.— 1975.— V. 29, N 130.— P. 396—406.
51. Gustafsson B., Sundström A. Incompletely parabolic systems in fluid dynamics // SIAM J. Appl. Math.— 1978.— V. 35, N 2.— P. 343—357.
52. Gottlieb D., Turkel E. Boundary conditions for multistep finite-difference methods for time dependent equations // J. Comput. Phys.— 1978.— V. 26, N 2.— P. 181—196.
53. Pandolfi M., Zanetti L. Some permeable boundaries in multidimensional unsteady flows // Lect. Notes Phys.— 1979.— V. 90.— P. 439—446.
54. Rudy D. H., Strikwerda J. C. A nonreflecting outflow boundary condition for subsonic Navier — Stokes calculations // J. Comput. Phys.— 1980.— V. 36, N 1.— P. 55—70.
55. Rudy D. H., Strikwerda J. C. Boundary conditions for subsonic compressible Navier — Stokes calculations // Comput. and Fluids.— 1981.— V. 9, N 3.— P. 327—338.
56. Федорченко А. Т. О методике численного исследования нестационарных дозвуковых течений вязкого газа в каналах // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1981.— Т. 21, № 5.— С. 1215—1232.
57. Федорченко А. Т. О демпфировании продольных акустических колебаний при расчете течений в каналах // Аэрофизика и геокосмические исследования.— М.: Изд-во МФТИ, 1983.— С. 63—66.
58. Cline M. C., Wilmoth R. G. Computation of high Reynolds number internal/external flows // AIAA Pap.— 1981.— N 1194.— P. 11.
59. Moretti G., Pandolfi M. Critical study of calculations of subsonic flows in ducts // AIAA J.— 1981.— V. 19, N 4.— P. 449—457.
60. Борисов А. В., Ковеня В. М. Применение неявной разностной схемы для расчета внутренних течений вязкого газа // Числ. методы мех. сплош. среды.— 1976.— Т. 7, № 4.— С. 36—47.
61. Кузнецова Л. В., Павлов Б. М. Применение уравнений Навье — Стокса к исследованию течения вязкого газа в сопле Лавала // Вычисл. методы и программир.— М.: Изд-во МГУ, 1979.— № 30.— С. 120—130.
62. Лапин Ю. В., Средец М. Х., Шур М. Л. Расчет взаимодействия сверхзвуковых струй при наличии химических реакций, колебательной релаксации и когерентного излучения на основе решения полной системы

- уравнений Навье — Стокса // Числ. методы мех. сплош. среды.— 1982.— Т. 13, № 2.— С. 107—124.
63. Cline M. C. Stability aspects of diverging subsonic flows // AIAA J.— 1980.— V. 18, N 5.— P. 534—539.
 64. Cline M. C. Reply by author to G. Moretti // AIAA J.— 1981.— V. 19, N 5.— P. 669—671.
 65. Moretti G. Comments on stability aspects of diverging subsonic flows in ducts // AIAA J.— 1981.— V. 19, N 5.— P. 669.
 66. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики.— М.: Наука, 1976.
 67. Turkel E. Progress in computational physics // Comput. and Fluids.— 1983.— V. 11, N 2.— P. 121—144.
 68. McDonald H., Briley W. R. Computational fluid dynamic aspects of internal flows // AIAA Comput. Fluid Dyn. Conf., Williamsbourg, Va., 1979.— New York, N. Y., s. a.— P. 266—283.
 69. Steger J. L., Pulliam T. H., Chima R. V. An implicit finite difference code for inviscid and viscous cascade flow // AIAA Pap.— 1980.— N 1427.— P. 14.
 70. Swanson R. C. Navier — Stokes solutions for nonaxisymmetric nozzle flows // AIAA Pap.— 1981.— N 1217.— P. 11.
 71. Shih T. I. P., Smith G. E., Springer G. S., Rimón Y. Boundary conditions for the solution of compressible Navier — Stokes equations by an implicit factored method // J. Comput. Phys.— 1983.— V. 52, N 1.— P. 54—79.
 72. Buggeln R. C., Briley W. R., McDonald H. Solution of the Navier — Stokes equations for three-dimensional turbulent flow with viscous sublayer resolution // AIAA 5th Comput. Fluid Dyn. Conf., Palo Alto, Calif., 1981.— New York, N. Y., s. a.— P. 247—256.
 73. Drummond J. P. Numerical study of a ramjet dump combustor flow field // AIAA Pap.— 1983.— N 421.— P. 12.
 74. Shamroth S., Gibelings H. J., McDonald H. A Navier — Stokes solution for laminar and turbulent flow through a cascade of airfoils // AIAA Pap.— 1980.— N 1426.— P. 13.
 75. Liou M. S., Coakley T. L., Bergmann M. Y. Numerical simulation of transonic flows in diffusers // AIAA Pap.— 1981.— N 1240.— P. 8.
 76. LeBalleur I. C., Peyret R., Viviani H. Numerical studies in high Reynolds number aerodynamics // Comput. and Fluids.— 1980.— V. 8, N 1.— P. 1—30.
 77. Белошицкий А. В., Бондарев Е. Н. Истечение вязкого газа из цилиндрического канала в вакуум // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1981.— № 1.— С. 122—128.
 78. Асланов Т. Д., Быркин А. П., Щенников В. В. Численный расчет внутренних течений вязкого газа с использованием уравнений Навье — Стокса // Уч. зап. Центр. аэрогидродинам. ин-та.— 1981.— Т. 12, № 3.— С. 44—54.
 79. Белоцерковский О. М., Быркин А. П., Мазуров А. П., Толстых А. И. Разностный метод повышенной точности для расчета течений вязкого газа // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1982.— Т. 22, № 6.— С. 1480—1490.
 80. McCormack R. W. The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // AIAA Pap.— 1969.— N 354.— P. 7.
 81. McCormack R. W., Baldwin B. S. A numerical method for solving the Navier — Stokes equations with application to shock-boundary layer interactions // AIAA Pap.— 1975.— N 1.— P. 8.
 82. Drummond I. P., Weidner E. H. Numerical study of a scramjet engine flow field // AIAA Pap.— 1981.— N 186.— P. 13.

83. Berman H. A., Anderson J. D., Jr., Drummond J. P. Supersonic flow over a rearwards facing step with transverse nonreacting hydrogen injection // AIAA J.—1983.—V. 21, N 12.—P. 1707—1713.
84. Kothary A. P., Anderson J. D., Jr., Jones E. Navier — Stokes solution for chemical laser flows // AIAA J.—1977.—V. 15, N 1.—P. 92—100.
85. Parthasarathy K. N., Anderson J. D., Jr., Jones E. Downstream mixing gasdynamic lasers: A numerical solution // AIAA J.—1979.—V. 17, N 11.—P. 1208—1215.
86. Anderson J. D., Jr., Jones E., Parthasarathy K. N., Colasurdo G., Oggiano M. S., Onorato M. Flow aspects of high power gasdynamic lasers: Shock tubes and Waves // Proc. 12th Int. Symp. Jerusalem, 1979.—Jerusalem, 1980.—P. 386—395.
87. Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса.—М.: Наука, 1984.
88. Ogran E. S., Boris J. P. Detailed modelling of combustion systems // Progr. Energy and Combust. Sci.—1981.—V. 7, N 1.—P. 1—72.
89. Махвиладзе Г. М., Щербак С. Б. Разностная схема для численного исследования нестационарных двумерных движений сжимаемого газа.—Ин-т пробл. мех. АН СССР.—Препр., 1978.—№ 113.
90. Harlow F. H., Amsden A. A. A numerical fluid dynamics calculation method for all flow speeds/J. Comput. Phys.—1971.—V. 8, N 2.—P. 197—213.
91. Ривард У., Батлер Т., Фармер О. Нестационарные турбулентные течения химически реагирующих газовых смесей // Численное решение задач гидромеханики.—М.: Мир, 1977.—С. 184—193.
92. Ramshaw J. D., Mjolsness R. C., Farmer O. A. Numerical method for two-dimensional steady-State chemical laser calculations // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.—1977.—V. 17, N 2.—P. 149—164.
93. Rappagani N. L., Lankford D. W. Time-dependent nozzle and base flow/cavity model of CW chemical laser flow field // AIAA Pap.—1981.—N 1135.—P. 12.
94. Баев В. К., Golovichev V. I., Quenoche H., Sedes C. Numerical modelling of a chemically driven H_2 —HCl transfer laser // Flames, Lasers, and React. Syst.—Techn. Pap. 8th Int. Colloq. Gasdyn. Explos. and React. Syst., Minsk, Aug., 1981.—New York, 1983.—P. 369—390.
95. Горение в сверхзвуковом потоке/Под ред. М. Г. Ктальхермана.—Новосибирск: Наука, 1984.
96. Головичев В. И. Численное моделирование термического сжатия сверхзвукового потока горением // Физ. горения и взрыва.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 50—56.
97. Головичев В. И., Яненко Н. Н. Численное моделирование влияния инжекции топлива на структуру ограниченного ближнего следа // ДАН СССР.—1983.—Т. 272, № 3.—С. 542—546.
98. Яненко Н. Н., Головичев В. И. Численный анализ сверхзвукового реагирующего течения в ближнем следе за обратным уступом // Физ. горения и взрыва.—1984.—Т. 20, № 4.—С. 52—56.
99. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.—Новосибирск: Наука, 1967.
100. Hirt C. W., Cook J. L. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain // J. Comput. Phys.—1972.—V. 10, N 2.—P. 324—340.
101. Hirt C. W., Amsden A. A., Cook J. L. An arbitrary Lagrangian — Eulerian computing method for all flow speeds // J. Comput. Phys.—1974.—V. 14, N 3.—P. 227—253.
102. Boni A. A., Chapman M., Schneyer G. P. Computer simulation of combustion process in stratified charge engine // Acta astronaut.—1976.—V. 3, N 3.—P. 293—307.

103. Bracco F. V., O'Rourke P. J. A review of initial comparisons of computed and measured two-dimensional unsteady flame fields // *Progr. Energy and Combust. Sci.*—1981.— V. 7, N 2.— P. 103—124.
104. Ramshaw J. D., Cloutman L. D. Numerical method for partial equilibrium flow // *J. Comput. Phys.*—1981.— V. 39, N 2.— P. 405—417.
105. Westbrook C. K. A generalized ICE method for chemically reactive flows in combustion systems // *J. Comput. Phys.*—1978.— V. 29, N 1.— P. 67—80.
106. Cloutman L. D., Dukowicz J. K., Ramshaw J. D. Numerical simulation of reactive flow in internal engines // *Lect. Notes Phys.*—1981.— V. 141.— P. 119—124.
107. Patankar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // *Int. J. Heat and Mass Transfer.*—1972.— V. 15, N 10.— P. 1787—1806.
108. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.— М.: Энергоатомиздат, 1984.
109. O'Rourke P. J., Bracco F. V. Two scaling transformations for the numerical computation of multidimensional unsteady laminar flames // *J. Comput. Phys.*—1979.— V. 33, N 2.— P. 185—203.
110. Butler J. D., Cloutman L. D., Dukowicz J. K., Ramshaw J. D. Multidimensional numerical simulation of reactive flow in internal combustion engines // *Progr. Energy and Combust. Sci.*—1981.— V. 7, N 1.— P. 293—315.
111. Pai B. R., Michelfelder S., Spalding D. B. Prediction of furnace heat transfer with a three-dimensional mathematical model // *Int. J. Heat and Mass Transfer.*—1978.— V. 21, N 5.— P. 571—580.
112. Lilley D. G. Flowfield modelling in practical combustors: a review // *J. Energy.*—1979.— V. 3, N 4.— P. 193—210.
113. Novick A. S., Miles G. A., Lilley D. G. Numerical simulation of combustor flow fields // *AIAA Pap.*—1978.— N 949.— P. 11.
114. Novick A. S., Miles G. A., Lilley D. G. Modelling parameter influences in gas turbine combustor // *AIAA Pap.*—1979.— N 354.— P. 9.
115. Khalil E. E. On the modelling of turbulent reacting flows in furnaces and combustion chambers // *Acta astronaut.*—1979.— V. 6, N 3—4.— P. 449—465.
116. Khalil E. E. Modelling of combustor flows // *Indian J. Technol.*—1981.— V. 19, N 10.— P. 436—441.
117. Lilley D. G., Rhode D. J., Samples J. W. Prediction of swirling reacting flow in ramjet combustors // *AIAA Pap.*—1981.— N 1485.— P. 11.
118. Correa S. M. Prediction of an axisymmetric combustor flow // *AIAA Pap.*—1983.— N 1264.— P. 6.
119. Khalil E. E., Spalding D. B., Whitelaw J. H. The calculation of local flow properties in two-dimensional furnaces // *Int. J. Heat and Mass Transfer.*—1975.— V. 18, N 6.— P. 775—791.
120. Khalil E. E. Combustion characteristics of high-pressure gas-field combustors // *AIAA J.*—1982.— V. 20, N 5.— P. 666—671.
121. Issa R. I., Lockwood F. C. On the prediction of two-dimensional supersonic viscous interactions near walls // *AIAA J.*—1977.— V. 15, N 2.— P. 182—188.
122. Rhode D. L., Sobolik S. R. Prediction of subsonic air flow through a rocket/ramjet combustor // *AIAA Pap.*—1985.— N 0332.— P. 8.
123. Hjertager B. H. Simulation of transient compressible turbulent reactive flows // *Combust. Sci. and Technol.*—1982.— V. 27, N 5—6.— P. 159—170.
124. Moulton A., Markatos N. C., Spalding D. B. The solution of flow problems in highly irregular domains by the finite-difference method // *Appl.*

- Numer. Modell.— Proc. 2nd Int. Conf., Madrid, 1978.— London: Plymouth, 1979.— P. 231—244.
125. Markatos N. C. G., Moulton A. The solution of three-dimensional elliptic flow problems by the finite-difference method // Appl. Numer. Modell.— Proc. 2nd Int. Conf., Madrid, 1978.— London: Plymouth, 1979.— P. 289—305.
 126. Markatos N. C. G., Rhodes N., Tatchell D. G. A general purpose program for the analysis of fluid flow problems // Numer. Meth. Fluid Dyn.— London, e. a.: Acad. Press, 1982.— P. 463—480.
 127. Scharnhorst R. K. Analysis of two-dimensional internal flows using a primitive-variable relaxation Navier — Stokes procedure // AIAA Pap.— 1982.— N 1083.— P. 9.
 128. Rosten H. I., Spalding D. B., Tatchell D. G. Phoenix: a general-purpose program for fluid-flow; heat-transfer and chemical reaction processes // Eng. Software III.— Proc. 3rd Int. Conf. London, 11—13 Apr. 1983.— Berlin e. a., 1983.— P. 639—655.
 129. Peaceman D. W., Rachford H. H., Jr. The numerical solution of parabolic and elliptic equations // J. Soc. Industr. and Appl. Math.— 1955.— V. 3, N 1.— P. 28—41.
 130. Douglas J., Gunn J. E. A general formulation of a alternating direction implicit methods. Part I. Parabolic and hyperbolic problems // Numer. Math.— 1964.— V. 6, N 5.— P. 428—453.
 131. Махвиладзе Г. М., Николова И. П. Тепловая конвекция и режимы протекания химической реакции при зажигании газовой горючей смеси.— Ин-т пробл. мех. АН СССР.— Препр., 1981.— № 172.
 132. Махвиладзе Г. М., Николова И. П. Режимы протекания экзотермической химической реакции в закрытом сосуде при естественной конвекции реагирующего газа // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1981.— № 5.— С. 3—10.
 133. Махвиладзе Г. М., Николова И. П. Численное моделирование развития очага горения в закрытом сосуда в условиях естественной конвекции // Физ. горения и взрыва.— 1982.— Т. 18, № 5.— С. 39—46.
 134. Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М., Николова И. П. Нестационарные движения реагирующего газа, сопровождающие протекание экзотермических реакций в закрытых сосудах // Теор. и прикл. мех. IV Нац. конгр., Варна, 1981.— Докл. Кн. I.— София, 1981.— С. 817—822.
 135. Копылов Г. Г., Махвиладзе Г. М. Влияние естественной конвекции на концентрационные пределы воспламенения горючей смеси в закрытом сосуде // Физ. горения и взрыва.— 1983.— Т. 19, № 2.— С. 3—10.
 136. Копылов Г. Г., Махвиладзе Г. М. Влияние ускорения внешней силы на развитие очага горения в закрытом сосуде // Физ. горения и взрыва.— 1983.— Т. 19, № 4.— С. 4—6.
 137. Копылов Г. Г., Махвиладзе Г. М., Мелихов В. И., Мелихов О. И. Численное исследование формирования и распространения очагов горения в закрытых объемах в условиях естественной конвекции.— Ин-т пробл. мех. АН СССР, 1984.— Препр. № 237.
 138. Поспелов В. А., Шур М. Л. Численное исследование смешения сверхзвуковых струй при наличии химической и колебательной неравновесности на основе уравнений Навье — Стокса // Теплообмен-VI. Т. 3.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1980.— С. 119—126.
 139. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Расчет взаимодействия сверхзвуковых турбулентных струй химически реагирующих газов в рамках системы уравнений Рейнольдса с использованием $(k-\epsilon)$ -модели турбулентности // Струйные течения жидкостей и газов.— Ч. 2.— Новополоцк: Новополоцкий политехн. ин-т, 1982.— С. 46—53.

140. Лапкин Ю. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Численное моделирование процессов в резонаторе непрерывного химического НГ-лазера на основе уравнений Навье — Стокса // Физ. горения и взрыва. — 1982. — Т. 18, № 5. — С. 89—96.
141. Лапкин Ю. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Численное исследование взаимодействия сверхзвуковых струй вязкого газа при наличии неравновесных физико-химических процессов // Теплофизика высоких температур. — 1983. — Т. 21, № 1. — С. 114—121.
142. Лапкин Ю. В., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Расчет тепло- и массообмена при течениях вязких неравновесных газовых смесей с учетом эффектов многокомпонентной диффузии // Теплообмен-VII. — Т. 3. — Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1984. — С. 121—126.
143. Mac Cormack R. W. A numerical method for solving the equations of compressible viscous flow // AIAA J. — 1982. — V. 20, N 9. — P. 1275—1281.
144. Briley W. R., McDonald H. On the structure and use of linearized block implicit schemes // J. Comput. Phys. — 1980. — V. 34, N 1. — P. 54—73.
145. Beam R. M., Warming R. F. An implicit factored scheme for compressible Navier — Stokes equations // AIAA J. — 1978. — V. 16, N 4. — P. 393—402.
146. Briley W. R., McDonald H. Solution of the multidimensional compressible Navier — Stokes equations by a generalized implicit method // J. Comput. Phys. — 1977. — V. 24, N 4. — P. 372—397.
147. McDonald H. Combustion modelling in two and three dimensions — some numerical considerations // Progr. Energy and Combust. Sci. — 1979. — V. 5, N 2. — P. 97—122.
148. Kansa E. J. An algorithm for multidimensional combusting problems // J. Comput. Phys. — 1981. — V. 42, N 1. — P. 152—194.
149. Березин Ю. А., Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Разностный метод решения задач обтекания в «естественных» координатах // Аэромеханика. — М.: Наука, 1976. — С. 253—259.
150. Яненко Н. Н., Ковеня В. М. Разностная схема для решения многомерных уравнений газовой динамики // ДАН СССР. — 1977. — Т. 232, № 6. — С. 1273—1276.
151. Березин Ю. А., Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Об одной неявной схеме расчета течения вязкого теплопроводного газа // Численные методы механики сплошной среды. — 1972. — Т. 3, № 4. — С. 3—18.
152. Махвиладзе Г. М., Щербак С. Б. Численный метод исследования нестационарных движений сжимаемого газа // Инж.-физ. ж. — 1980. — Т. 38, № 3. — С. 528—537.
153. Щербак С. Б. Об одном методе расчета нестационарных пространственных задач конвекции и горения газов // Численные методы механики сплошной среды. — 1982. — Т. 13, № 3. — С. 122—134.
154. Демьянов А. Ю., Орехов А. М., Панасенко А. В. Об одной неявной разностной схеме для расчета нестационарных вязких течений с областями сильных неоднородностей // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1985. — Т. 25, № 3. — С. 471—473.
155. Петражицкий Г. Б., Полежаев В. И. Исследование режимов теплообмена и структуры вихревого течения при свободном движении вязкого сжимаемого газа в двумерных полостях // Тр. Моск. высш. техн. уч-ща им. Н. Э. Баумана. — 1976. — № 222. — С. 27—66.
156. Полежаев В. И. Численное решение системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа. — 1967. — № 2. — С. 103—111.
157. Федорченко А. Т. Двумерные нелинейные волновые процессы при импульсном локальном тепловыделении в газовом потоке // Акуст. ж. — 1981. — Т. 27, № 4. — С. 595—604.

158. Briley W. R., McDonald H., Shamroth S. J. A low Mach number Euler formulation and application to time-iterative LBI schemes // AIAA J.—1983.— V. 21, N 10.— P. 1467—1469.
159. Кузнецов А. Е., Нехамкина О. А., Стрелец М. Х. О численном моделировании гидродинамики и теплообмена при дозвуковых стационарных течениях вязкого газа в каналах // Теплообмен-VII. Т. 1. Ч. 1.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1984.— С. 111—115.
160. Gear W. C. Numerical initial value problems in ordinary differential equations.— New Jersey: Prentice Hall, 1971.— 253 p.
161. Головачев Ю. П. Расчет обтекания затупленных тел неравновесными газовыми смесями на основе уравнений Навье — Стокса // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1978.— Т. 18, № 5.— С. 1266—1274.
162. Golovashov Y. P. Numerical investigation of supersonic non-equilibrium carbon dioxide flow past blunt bodies // Int. J. Heat and Mass Transfer.— 1981.— V. 24, N 4.— P. 649—657.
163. Афонина Н. Е., Громов В. Г. Вязкое обтекание затупленного конуса углекислым газом // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1978.— № 4.— С. 102—105.
164. Афонина Н. Е., Громов В. Г. Численное исследование гиперзвукового обтекания затупленного тела углекислым газом // Численные методы механики сплошной среды.— 1982.— Т. 13, № 1.— С. 11—15.
165. Афонина Н. Е. Численное исследование вязкого обтекания тел гиперзвуковым потоком углекислого газа // Аэродинамика больших скоростей.— Москва, 1979.— № 5.— С. 76—86.
166. Blottner F. G. Finite difference method of solution of the boundary layer equations // AIAA J.—1970.— V. 8, N 2.— P. 193—205.
167. Кузнецов А. Е., Нехамкина О. А., Стрелец М. Х. Численное исследование теплообмена при существенно дозвуковом химически неравновесном течении диссоциирующего газа в канале с внезапным изменением площади поперечного сечения // Эксперим. и теор. исслед. теплообмена при течении диссоциирующ. газов в каналах.— Минск: Ин-т ядерной энергетики АН БССР, 1983.— С. 48—57.
168. Кузнецов А. Е., Нехамкина О. А., Стрелец М. Х. Расчет стационарных дозвуковых течений химически неравновесных газовых смесей в каналах переменного сечения при наличии произвольных конечных изменений плотности // Теплофиз. высок. температур.— 1984.— Т. 22, № 6.— С. 1125—1133.
169. Mase A. C. H., Markatos N. C., Spalding D. B., Tatchell D. G. Analysis of combustion in recirculating flow for rocket exhausts in supersonic streams // J. Spacecraft and Rockets.— 1982.— V. 19, N 6.— P. 557—563.
170. Ruggieri N. Gaseous emissions of gas turbine combustors // AIAA Pap.—1983.— N 242.— P. 8.
171. Keule H. Numerical solution of near-equilibrium boundary layers // AIAA J.—1969.— V. 7, N 1.— P. 172—173.
172. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном пограничном слое // ДАН СССР.— 1963.— Т. 155, № 6.— С. 1278—1282.
173. Суслов О. Н., Тирский Г. А. Определение, свойства и вычисление эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном ионизованном пограничном слое // Ж. прикл. мех. и техн. физ.— 1970.— № 4.— С. 60—72.
174. Герштейн Э. Л. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1970.— № 1.— С. 64—73.
175. Суслов О. Н. Многокомпонентная диффузия и теплообмен при обтекании тела химически равновесным ионизованным газом // Ж. прикл. мех. и техн. физ.— 1972.— № 3.— С. 53—59.

176. Ковалев В. Л., Суслов О. Н. Разностный метод с повышенной точностью аппроксимации для интегрирования уравнений химически неравновесного многокомпонентного вязкого ударного слоя // Гиперзвук. пространств. течения при наличии физ.-хим. превращ.— М.: Изд-во МГУ, 1981.— С. 113—137.
177. Грузин А. Д., Зинченко В. И. Исследование неавтономного ламинарного пограничного слоя с учетом неравновесных химических реакций и вдува // Численные методы механики сплошной среды.— 1979.— Т. 10, № 7.— С. 37—46.
178. Гершуни Г. З., Жукович Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1972.
179. Джалурия И. Естественная конвекция. Тепло- и массообмен.— М.: Мир, 1983.
180. Шапошников И. Г. К теории конвективных явлений в бинарной смеси // Прикл. мат. и мех.— 1953.— Т. 17, № 5.— С. 604—606.
181. Ramshaw J. D., Garr J. A. Numerical technique for low-speed homogeneous two phase flow sharp interfaces // J. Comput. Phys.— 1976.— V. 21, N 4.— P. 438—453.
182. Никулин Д. А., Потехин Г. С., Стрелец М. Х. Приближенная система уравнений для описания нестационарной естественной конвекции в бинарных газовых смесях // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1980.— № 5.— С. 57—59.
183. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Математическая модель и результаты расчетов нестационарного теплообмена при естественной конвекции бинарных смесей с произвольным соотношением плотностей // Теплообмен-VI. Т. 1. Ч. 3.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена, 1980.— С. 114—118.
184. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. О возможности автоколебательных решений нестационарных задач смешанной конвекции в газовых смесях // ДАН СССР.— 1981.— Т. 260, № 3.— С. 554—556.
185. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Расчет нестационарной смешанной конвекции бинарных газовых смесей при наличии значительных изменений плотности // Ж. прикл. мех. и техн. физ.— 1984.— № 1.— С. 55—62.
186. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Численное моделирование нестационарной естественной конвекции сжимаемого газа в замкнутой неадиабатической области // Теплофиз. высок. температур.— 1984.— Т. 22, № 5.— С. 906—912.
187. Стрелец М. Х. О численном моделировании существенно дозвуковых течений газов и газовых смесей при наличии значительных изменений плотности // Динамика неоднородных и сжимаемых сред.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1984.— С. 70—83.
188. Кузнецов А. Е., Стрелец М. Х. Численное моделирование существенно дозвуковых стационарных неизотермических течений однородного вязкого газа в каналах // Численные методы механики сплошной среды.— 1983.— Т. 14, № 6.— С. 97—114.
189. Никулин Д. А. О применимости приближения Буссинеска для решения задач нестационарной концентрационной естественной конвекции // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1982.— № 5.— С. 153—155.
190. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Расчет нестационарной концентрационной естественной конвекции в бинарных газовых смесях с произвольным отношением плотностей // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— № 4.— С. 27—31.
191. Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Влияние начальных условий на характеристики нестационарной концентрационной естественной конвекции в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1983.— № 4.— С. 145—148.
192. Королева И. Н., Никулин Д. А., Стрелец М. Х. Оценка влияния эффектов трехмерности на развитие нестационарной концентра-

- ционной естественной конвекции в замкнутой области // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1983.— № 5.— С. 175—178.
193. Жмакин А. И., Макаров Ю. Н. Численное исследование медленных неизоэнтальпических течений вязкого газа в каналах.— Физ.-техн. ин-т АН СССР. Препр.— 1983.— № 821.
194. Жмакин А. И., Макаров Ю. Н. Численное исследование выноса тепловых неоднородностей из плоских каналов.— Физ.-техн. ин-т АН СССР. Препр.— 1983.— № 827.
195. Жмакин А. И., Макаров Ю. Н. Численное моделирование естественноконвективных течений вязкого газа в трехмерных полостях // Тепло-массообмен-VII. Т. 1. Ч. 1.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена, 1984.— С. 81—85.
196. Жмакин А. И., Макаров Ю. Н. Численное моделирование гипозвуковых течений вязкого газа // ДАН СССР.— 1985.— Т. 280, № 4.— С. 827—830.
197. Жмакин А. И., Макаров Ю. Н. Численное моделирование интенсивного тепловыделения в медленном потоке вязкого газа // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 6.— С. 16—22.
198. Amsden A. A., Harlow F. H. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculation // J. Comput. Phys.— 1970.— V. 6, N 2.— P. 322—325.
199. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys.— 1967.— V. 2, N 1.— P. 12—26.
200. Chorin A. J. Numerical solution of the Navier — Stokes equations // Math. Comput.— 1968.— V. 22, N 4.— P. 745—762.
201. Владимирова Н. Н., Кузнецов Б. Г., Яненко Н. Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости // Некоторые вопросы вычисл. и прикл. матем.— Новосибирск: Наука, 1966.— С. 186—192.
202. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой.— М.: Физматгиз, 1961.
203. Mitra N. K., Fiebig M. Supersonic nozzle flow-fields: a comparison of fully viscous and Navier — Stokes solutions // Recent Develop. Theor. and Exp. Fluid Mech., Berlin e. a., 1979.— P. 157—165.
204. Williams T. C. III. Viscous compressible and incompressible flow in slender channels // AIAA J.— 1963.— V. 1, N 1.— P. 186—195.
205. Davis R. T. Numerical solution of the hypersonic viscous shock-layer equation // AIAA J.— 1970.— V. 8, N 5.— P. 843—851.
206. Davis R. T., Rubin S. G. Non Navier — Stokes viscous flow computations // Comput. and Fluids.— 1980.— V. 8, N 1.— P. 101—131.
207. Черный С. Г. О выборе системы координат для численного решения упрощенных уравнений Навье — Стокса // Численные методы механики сплошной среды.— 1982.— Т. 13, № 1.— С. 132—146.
208. Ковеня В. М., Черный С. Г. Метод решения стационарных упрощенных уравнений вязкого газа.— Ин-т теор. и прикл. мех. СО АН СССР. Препр.— 1981.— № 42.
209. Лапин Ю. В., Нехамкина О. А., Поспелов В. А., Стрелец М. Х., Шур М. Л. Численное моделирование внутренних течений вязких химически реагирующих газовых смесей // Итоги науки и техн. Сер. Мех. жидкости и газа.— М.: ВИНТИ, 1985.— Т. 19.— С. 86—185.
210. Межиров И. И. Исследование течений в гиперзвуковых соплах аэродинамических труб // Труды ЦАГИ.— 1981.— № 2119.
211. Rae W. J. Some numerical results on viscous low-density nozzle flows in slender-channel approximation // AIAA J. 1971.— V. 9, N 5.— P. 811—820.
212. Ветлужкий В. Н., Мучная М. И. Расчет вязкого течения в гиперзвуковом сопле // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1977.— № 4.— С. 29—35.

213. Mitra N. K., Fibig M. Determination of stagnation chamber temperature in high-enthalpy nozzle flows // AIAA J.— 1976.— V. 14, N 3.— P. 406—408.
214. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики.— М.: Наука, 1975.
215. Пирумов У. Г., Росляков Г. С. Течения газа в соплах.— М.: МГУ, 1978.
216. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1978.
217. Брайловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом // Вычисл. методы и программир.— М.: Изд-во ВЦ МГУ, 1962.— № 1.— С. 167—182.
218. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя // Вычисл. методы и программир.— М.: Изд-во ВЦ МГУ, 1963.— № 2.— С. 110—116.
219. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. Приложение к Ж. вычисл. мат. и мат.-физ.— 1964.— С. 304—325.
220. Петухов И. В., Селиверстов С. Н. К расчету тонкого ударного слоя // Труды ЦАГИ.— 1968.— № 1016.
221. Blottner F. G. Nonequilibrium laminar boundary-layer flow of ionized air // AIAA J.— 1964.— V. 2, N 11.— P. 1921—1927.
222. Щенников В. В. Расчет ламинарного пограничного слоя вдоль образующей сублимирующего тела вращения // Ж. вычисл. мат. и мат.-физ.— 1965.— Т. 5, № 1.— С. 139—144.
223. Громов В. Г. Химически неравновесный ламинарный пограничный слой в диссоциированном воздухе // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа.— 1966.— № 2.— С. 3—9.
224. Громов В. Г. Расчет ламинарного пограничного слоя при наличии неравновесных химических реакций // Новые применения метода сеток в газовой динамике.— М.: Изд-во МГУ, 1971.— С. 31—63.
225. Патанкар С., Сполдинг Д. Тепло- и массообмен в пограничных слоях.— М.: Энергия, 1971.
226. Sebeci J., Smith A. M. O. Analysis of turbulent boundary layers.— New York, London: Acad. Press, 1974.— 404 p.
227. Алексеев Б. В. Пограничный слой с химическими реакциями.— М.: ВЦ АН СССР, 1967.
228. Симони Л. М. Численное решение задачи о неизотермическом движении вязкой жидкости в плоской трубе // Инж.-физ. ж.— 1966.— Т. 10, № 1.— С. 86—91.
229. Patankar S. V., Spalding D. B. A finite-difference procedure for solving the equations of the two-dimensional boundary layer // Int. J. Heat and Mass Transfer.— 1967.— V. 10, N 10.— P. 1389—1412.
230. Поспелов В. А. Эффективная разностная схема расчета характеристик HF-химического лазера непрерывного действия // Численные методы механики сплошной среды.— 1982.— Т. 13, № 3.— С. 99—105.
231. Blottner F. G. Variable grid scheme applied to turbulent boundary layers // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.— 1974.— N 2.— P. 179—194.
232. Pulliam T. H., Steger J. L. On implicit finite-difference simulations of three-dimensional flow // AIAA Pap.— 1978.— N 10.
233. Kutler P., Chakravarthy S., Lombard C. Hypersonic flow over ablated nosetips using an unsteady implicit numerical procedure // AIAA Pap.— 1978.— N 213.
234. Бондарев Е. Н., Горина А. Н. Решение задачи о сверхзвуковой ламинарной нерасчетной струе в слутном потоке разностным методом // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1968.— № 4.— С. 114—118.

235. М у ч н а я М. И. Использование упрощенных уравнений Навье — Стокса для расчета вязкого течения в гиперзвуковом сопле. — Ин-т теор. и прикл. мех. СО АН СССР. Препр. — 1981. — № 17.
236. М у ч н а я М. И. Расчет течения в профилированных гиперзвуковых соплах с помощью упрощенных уравнений Навье — Стокса // Численные методы механики сплошной среды. — 1982. — Т. 13, № 5. — С. 145—148.
237. Б у н г о в а Т. А., Л а в р о в А. В., С п а с Т. А., Х а р ч е н к о С. С. Неравновесные физико-химические процессы в системе плоских турбулентных нерасчетных струй // Струйные течения жидкостей и газов. Ч. 3. — Новополюк: Новополюцкий политехн. ин-т, 1982. — С. 34—41.
238. Л а в р о в А. В., С п а с Т. А., Х а р ч е н к о С. С. Турбулентное смешение плоских реагирующих струй при наличии поперечного градиента давления // Теплофиз. высок. температур. — 1984. — Т. 22, № 1. — С. 97—94.
239. Л а в р о в А. В., С п а с Т. А., Х а р ч е н к о С. С. К вопросу о численном моделировании стационарного смешения нерасчетных струй с учетом неравновесных процессов // Физ. горения и взрыва. — 1984. — Т. 20, № 4. — С. 56—65.
240. Г о л о в и ч е в В. И. Численное моделирование процессов турбулентного смешения сверхзвуковых свободных и ограниченных потоков реагирующих газов // Газодинамика горения в сверхзвуковом потоке. — Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1979. — С. 27—52.
241. Г о л о в и ч е в В. И. Учет вязких эффектов при анализе неравновесных течений в соплах ГДЛ // Газодинамика течений в соплах и диффузорах. — Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1982. — С. 3—24.
242. Г о л о в и ч е в В. И., М а н ж и Ш., С о л о у х и н Р. И., Ф о м и н Н. А. Численное моделирование процессов смешения при получении инверсии газодинамическими методами // Числ. методы решения задач переноса. Ч. 2. — Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1979. — С. 3—46.
243. Г о л о в и ч е в В. И., Я н и к А. А. Численное моделирование газодинамических и кинетических процессов в быстропоточных лазерных системах диффузионного типа // Исслед. рабочего процесса газодинамических и химических лазеров. — Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1979. — С. 84—145.
244. К о в е н я В. М., Ч е р н ы й С. Г. Маршевый метод решения стационарных упрощенных уравнений Навье — Стокса // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1983. — Т. 23, № 5. — С. 1186—1198.
245. Г о л о в а ч е в Ю. П., Ф у р с е н к о А. А. Маршевый метод расчета течений вязкого газа // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1981. — Т. 21, № 6. — С. 1592—1596.
246. В о й н о в и ч П. А. Маршевый метод расчета течений вязкого газа в каналах // Ж. вычисл. мат. и мат. физ. — 1984. — Т. 24, № 6. — С. 944—947.
247. Schiff L. B., Steger J. L. Numerical simulation of steady supersonic viscous flow // AIAA Pap. — 1979. — N 130. — P. 9.
248. Hendricks W. L., Kurzius S. C., Mikatariyan R. R. Comparison between LAMP theoretical predictions and experimental spectroscopic and chemical laser performance // AIAA Pap. — 1977. — N 656. — P. 7.
249. Lubard S. C., Helliwell W. S. Calculation of the flow on a cone at high angle of attack // AIAA J. — 1974. — V. 12, N 7. — P. 965—974.
250. Rubin S. G., Lin A. Marching with the parabolized Navier — Stokes equations // Isr. J. Technol. — 1980. — V. 18, N 1—2. — P. 21—31.
251. К о в е н я В. М., Ч е р н ы й С. Г. Решение упрощенных уравнений вязкого газа маршевым методом // Численные методы механики сплошной среды. — 1979. — Т. 10, № 1. — С. 71—87..
252. К о в е н я В. М., Ч е р н ы й С. Г., Я н е н к о Н. Н. Упрощенные уравнения для описания течений вязкого газа // ДАН СССР. — 1979. — Т. 245, № 6. — С. 1322—1324.

253. Lin T. C., Rubin S. G. A numerical model for supersonic viscous flow over a slender reentry vehicle // AIAA Pap.— 1979.— N 205.— P. 10.
254. Войнович П. А., Головачев Ю. П., Фурсенко А. А. Маршевый метод расчета смешанных течений вязкого газа // Численные методы динамики вязкой жидкости.— Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1983.— С. 93—95.
255. Spradley L. W., Stalnaker J. F., Xiques K. E. Quasi-parabolic technique for spatial marching Navier — Stokes computations // AIAA J.— 1982.— V. 20, N 1.— P. 31—32.
256. Войнович П. А., Фурсенко А. А. Расчет струйных и внутренних течений вязкого газа.— I. Численные методы.— Физ. техн. ин-т АН СССР. Препр.— 1983.— № 860.
257. Pratar V. S., Spalding D. B. Numerical computations of the flow in curved ducts // Aeronaut. Quart.— 1975.— V. 26, N 3.— P. 219—228.
258. Pratar V. S., Spalding D. B. Fluid flow and heat transfer in three-dimensional duct flows // Int. J. Heat and Mass Transfer.— 1976.— V. 19, N 10.— P. 1183—1188.
259. Moore J., Moore J. G. A calculation procedure for three-dimensional, viscous, compressible duct flow. Part I. Inviscid flow considerations // Trans. ASME: J. Fluids Eng.— 1979.— V. 101, N 4.— P. 415—422.
260. Moore J., Moore J. G. A calculation procedure for three-dimensional, viscous, compressible duct flow. Part II. Stagnation pressure losses in rectangular elbow // Trans. ASME: J. Fluids Eng.— 1979.— V. 101, N 4.— P. 423—428.
261. Vanka S. P., Chen B. C. J., Sha W. T. A semi-implicit calculation procedure for flows described in boundary-fitted coordinate systems // Numer. Heat Transfer.— 1980.— V. 3, N 1.— P. 1—19.
262. Cooke C. H., Dwyer D. M. A modified Dodge algorithm for the parabolized Navier — Stokes equations and compressible duct flows // Int. J. Numer. Meth. Fluids.— 1983.— V. 3, N 5.— P. 493—506.
263. Rhie C. M. Basic calibration of partially-parabolic procedure aimed at centrifugal impeller analysis // AIAA Pap.— 1983.— N 260.— P. 12.
264. Войнович П. А., Фурсенко А. А. Метод глобальных итераций для расчета смешанных течений вязкого газа // Дифференц. уравнения.— 1984.— Т. 20, № 7.— С. 1151—1156.
265. Войнович П. А., Фурсенко А. А. Численное моделирование струйных и внутренних течений вязкого газа // Теплообмен.— VII. Т. 1. Ч. 1.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1984.— С. 41—45.
266. Chilukuri R., Fletcher R. H. Numerical solutions to the partially parabolized Navier — Stokes equations for developing flow in a channel // Numer. Heat Transfer.— 1980.— V. 3, N 2.— P. 169—188.
267. Israeli M., Lin A. Numerical solution and boundary conditions for boundary layer like flows // Lect. Notes Phys.— 1982.— V. 170.— P. 266—272.
268. Стулов В. П. Пограничные слои в химически реагирующих и излучающих средах // Аэромеханика и газовая динамика.— М.: Наука, 1976.— С. 150—159.
269. Алемасов В. Е., Дрегаллин А. Ф., Тишин А. П. Теория ракетных двигателей.— М.: Машиностроение, 1969.
270. Петухов Б. С., Шиков В. К. Теплообмен и сопротивление при течении диссоциирующего газа в трубах // Вопросы конвективного и радиационно-кондуктивного теплообмена.— М.: Наука, 1980.— С. 77—143.
271. Хайлов В. М. Химическая релаксация в соплах реактивных двигателей.— М.: Машиностроение, 1975.
272. Лосев С. А. Газодинамические лазеры.— М.: Наука, 1977.
273. Химические лазеры/Под ред. Р. Гросса, Дж. Ботта.— М.: Мир, 1980.
274. Башкин А. С., Игошин В. И., Ораевский А. Н., Щеглов В. А. Химические лазеры.— М.: Наука, 1982.

275. Кантуэлл Б. Дж. Организованные движения в турбулентных потоках // Вихри и волны.— М.: Мир, 1984.
276. Бредшоу П. Введение в турбулентность и ее измерение.— М.: Мир, 1974.
277. Чепмен Д. Р. Вычислительная аэродинамика и перспективы ее развития // Ракетная техника и космонавтика.— 1980.— Т. 18, № 2.— С. 3—32.
278. Грязнов В. Л., Полежаев В. И. Численное моделирование турбулентного режима конвекции в вертикальном слое // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1977.— № 5.— С. 8—15.
279. Дайковский А. Т., Полежаев В. И., Федосеев А. И. Численное моделирование переходного и турбулентного режимов конвекции на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса.— Ин-т пробл. мех. АН СССР. Препр.— 1978.— № 101.
280. Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Методы численного моделирования нестационарных течений несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале.— Ин-т прикл. мат. АН СССР. Препр.— 1982.— № 191.
281. Рождественский Б. Л., Симакин И. Н. Двумерные и трехмерные вторичные течения в плоском канале, их связь и сравнение с турбулентными течениями // ДАН СССР.— 1983.— Т. 273, № 3.— С. 553—558.
282. Левитан Ю. Л., Моисеенко Б. Д., Приймак В. Г., Рождественский Б. Л., Сидорова В. К. Методы численного моделирования турбулентного течения жидкости в канале // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1981.— Т. 21, № 3.— С. 737—747.
283. Приймак В. Г., Рождественский Б. Л. Моделирование двумерной турбулентности в плоском канале // Изв. АН СССР. Сер. Мех. жидкости и газа.— 1982.— № 6.— С. 26—35.
284. Шумман У., Гретцбах Г., Кляйзер Л. Прямые методы численного моделирования турбулентных течений // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.— С. 103—220.
285. Орсег С. Численное моделирование турбулентных течений // Турбулентность: принципы и применения.— М.: Мир, 1980.— С. 311—347.
286. Fox D. G., Lilly D. K. Numerical simulation of turbulent flows // Review of Geophysics and Space Physics.— 1972.— V. 10, N 1.— P. 51—72.
287. Ферцигер Дж. Х. Численное моделирование крупных вихрей для расчета турбулентных течений // Ракетная техника и космонавтика.— 1977.— Т. 15, № 9.— С. 56—66.
288. Deardorff J. W. The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence // J. of Fluids Eng.— 1973.— V. 95.— Ser. I, Sept.— P. 429—438.
289. Deardorff J. W. Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer // Boundary Layer Meteorology.— 1974.— V. 7.— P. 81—106.
290. Deardorff J. W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers // J. of Fluid Mech.— 1970.— V. 41.— P. 453.
291. Белоцерковский О. М. Прямое численное моделирование свободной развитой турбулентности // Ж. Вычисл. мат. и мат. физ.— 1985.— Т. 25; № 12.— С. 1856—1882.
292. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости.— Л.: Судостроение, 1973.
293. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1.— М.: Наука, 1965.
294. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия // Проблемы турбулентности.— М.; Л.: ОНТИ, 1936.— С. 135—227.

295. Н и к о л а е в с к и й В. Н. Пространственное осреднение и теория турбулентности // Вихри и волны.— М.: Мир, 1984.— С. 266—335.
296. Р о д и В. Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений.— М.: Мир, 1984.— С. 227—322.
297. Х а р ш а П. Модели переноса кинетической энергии // Турбулентность: принципы и применения.— М.: Мир, 1980.— С. 207—261.
298. Л е в е л л е н В. Метод инвариантного моделирования // Турбулентность: принципы и применения.— М.: Мир, 1980.— С. 262—310.
299. И е в л е в В. М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред.— М.: Наука, 1975.
300. Г и н е в с к и й А. С., И о с е л е в и ч В. А., К о л е с н и к о в А. В., Л а п и н Ю. В., П и л и п е н к о В. Н., С е к у н д о в А. Н. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Механика жидкости и газа (Итоги науки и техники).— ВИНТИ, 1978.— Т. 2.
301. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Т. 2/Под ред. Хоуарта.— М.: ИЛ, 1956.
302. S p a l d i n g D. B. A single formula for the law of the wall // J. Appl. Mech.— 1961.— V. 28.— P. 455—457.
303. C o l e s D. E. The law of the wake in the turbulent boundary layer // J. Fluid Mech.— 1956.— V. 1.— P. 191—226.
304. K l e b a n o f f P. S. Characteristics of the turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // NASA Tech. Note.— 1954.— N 3178.
305. L a u n d e r J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow // NASA Tech. Note.— 1954.— N 1174.
306. К л а у з е р Ф. Турбулентный пограничный слой // Проблемы механики. Вып. 2.— М.: ИЛ, 1959.— С. 297—340.
307. Х и н ц е И. О. Турбулентность.— М.: Физматгиз, 1963.
308. P a t a n k a r S. V., S p a l d i n g D. B. Heat and mass transfer in boundary layers.— London: Morgan — Grampion, 1967.
309. K l i n e S. J., R e y n o l d s W. C., S c h r a u b F. A., R u n s t a d l e r P. W. The structure of turbulent boundary layers // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 30.— P. 741—773.
310. C o r i n ò E. R., B r o d k e y R. S. A visual investigation of the wall region in turbulent flow // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 37.— P. 1—30.
311. W i l l m o r t h W. W., L u S. S. Structure of the Reynolds stress near the wall // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 55.— P. 65—69.
312. R a o K. N., N a r a s i m h a R., N a r a y a n a n M. A. P. Bursting in a turbulent boundary layer // J. Fluid Mech.— 1971.— V. 48.— P. 339—352.
313. B l a c k w e l d e r R. F., E c k e l m a n n H. Streamwise vortices associated with the bursting phenomenon // J. Fluid Mech.— 1979.— V. 94.— P. 577—594.
314. F a l c o R. E. Coherent motions in the outer region of turbulent boundary layers // Phys. Fluids.— 1977.— V. 20(10).— P. 5124—5132.
315. B r o w n G. L., T h o m a s A. S. W. Large structure in a turbulent boundary layer // Phys. Fluids.— 1977.— V. 20(10).— P. 243—252.
316. B l a c k w e l d e r R. F., K o v a s z n a y L. S. G. The time scales and correlations in a turbulent boundary layer // Phys. Fluids.— 1972.— V. 15.— P. 1545—1554.
317. C o l e s D. E. A model for flow in viscous sublayer // Proc. Workshop on Coherent Structure of Turbulent Boundary Layers/Ed. C. R. Smith, D. E. Abbot.— 1978.— P. 462—475.
318. Л а п и н Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа.— М.: Наука, 1970.
319. Х и л л Ф. К. Измерения пограничного слоя в гиперзвуковом потоке // Вопросы ракетной техники.— М.: ИЛ, 1957.— № 1.
320. Л ö б б Р. К., У и н к л е р Е. М., П е р ш Дж. Экспериментальные исследования турбулентных пограничных слоев в гиперзвуковом потоке // Вопросы ракетной техники.— М.: ИЛ, 1955.— № 5.

321. Launder B. E., Spalding D. B. Lectures in mathematical models of turbulence.— L., N. Y.: Academic Press, 1972.
322. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2.— М.: Наука, 1965.
323. Лойцянский Л. Г. Наследственные явления в турбулентных пограничных слоях // Водные ресурсы.— 1984.— № 3.— С. 52—59.
324. Лойцянский Л. Г. Наследственные явления в турбулентных движениях // Изв. АН СССР. Сер. Механ. жидк. и газа.— 1982.— № 2.— С. 5—19.
325. Кадер Б. А., Яглом А. М. Влияние шероховатости и продольного градиента давления на турбулентные пограничные слои // Итоги науки и техники. Сер. Механ. жидк. и газа.— М.: ВИНТИ, 1985.— Т. 18.— С. 3—111.
326. Boussinesque J. Theorie de l'ecoulement turbulent // Memoires presentees par diverses savants a l'Acad. des Sci.— Paris, 1877.— V. 23.
327. Prandtl L. Uber die ausgebildete turbulenz // ZAMM.— 1925.— N 5.
328. Лойцянский Л. Г. Гипотеза локальности в турбулентном движении жидкости при наличии вязкости // Прикл. математ. и механика.— 1958.— Т. 22, вып. 5.— С. 600—611.
329. Никурадзе И. Закономерности турбулентного движения в гладких трубах // Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1936.— С. 75—150.
330. Прандтль Л. Результаты работ последнего времени по изучению турбулентности // Проблемы турбулентности.— М.: ОНТИ, 1936.— С. 9—34.
331. Escudier M. P. The distribution of mixing length in turbulent flows near walls // Imperial Colledge, Heat Transfer Section, 1965.— Rep. TWF TN, 1.
332. Reichardt H. Warmeubertragungen in turbulenten Rubungsschritten // ZAMM.— 1940.— Bd. 20.
333. Ван Дрийдт Е. Р. Турбулентный пограничный слой в сжимаемой жидкости // Механика.— М.: ИЛ, 1952.— № 1.— С. 27—55.
334. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
335. Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении // Прикл. математ. и механика.— 1960.— Т. 24, № 4.— С. 637—646.
336. Loitsianski L. G. Sur l'action reciproque de la transmission moleculaire et molaire dans l'ecoulement turbulent // Proc. of the 10th Int. Congr. of Appl. Mech., Stresa, Italy, 1960.— Elsevier Publ. Comp., Amsterdam.— N. Y., 1962.— P. 202—204.
337. Лойцянский Л. Г. Демпфирующий фактор к формуле Прандтля для переходного участка турбулентного пограничного слоя // Инж.-физ. ж.— 1983.— Т. 15, № 6.— С. 924—932.
338. Deisler R. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer, and friction in smooth tubes at high Prandtl and Shmidt numbers // NACA Rep.— 1959.— N 1210.
339. Себеси Т., Смит А., Мосинский Г. Расчет сжимаемого адиабатического турбулентного пограничного слоя // Ракетная техника и космонавтика.— 1970.— Т. 8, № 11.— С. 66—76.
340. Kuhn G. D., Nielsen J. N. Prediction of turbulent separated boundary layers // AIAA Pap.— 1973.— N 663.
341. Ривз Б. Л. Двухслойная модель турбулентного пограничного слоя // Ракетная техника и космонавтика.— 1974.— Т. 12, № 7.— С. 62—73.
342. Себеси Т. Кинематическая турбулентная вязкость при малых числах Рейнольдса // Ракетная техника и космонавтика.— 1973.— Т. 11, № 1.— С. 121—123.
343. Лапин Ю. В., Стрелец М. Х. Модификация гипотезы Клаузера для равновесных и неравновесных турбулентных пограничных слоев // Теплофиз. высоких температур.— 1985.— Т. 23, № 3.— С. 522—529.
344. Computation of turbulent boundary layer. 1968.— Proc. AFOSR—IFR—Stanford Conf.— 1969.— V. 1, 2.

345. Г у х м а н А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. — М.: Высшая школа, 1974.
346. S i m p s o n R. L., C h e w Y. J., S h i v a p r a s a d B. G. The structure of a separating turbulent boundary layer. Part 1 // J. of Fluid Mech. — 1981. — V. 113. — P. 23—51.
347. S i n g h a l A. K., S p a l d i n g D. B. — Comput. Mech. Appl. Mech. Eng. — 1981. — V. 25. — P. 365.
348. К о л м о г о р о в А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР, сер. физ. — 1942. — Т. 6, № 1—2.
349. P r a n d t l L., W i e g h a r d t K. Uber ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz // Nachr. Acad. Wiss., Göttingen, Math. Phys. — 1945. — N 6. — P. 6—19.
350. Г л у ш к о Г. С. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Механ. — 1965. — № 4. — С. 13—23.
351. А к а т н о в Н. И., К у з н е ц о в А. П. Уравнение баланса энергии турбулентности в теории свободного турбулентного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1970. — № 6. С. 75—79.
352. А к а т н о в Н. И., Т у л ь в е р т В. Ф. Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории пристеночных турбулентных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1973. — № 3. — С. 25—33.
353. R o t t a J. C. Statistische theorie nichthomogener Turbulenz // Z. Physic. — 1951. — V. 129, N 6. — P. 547—572; V. 131, N 1. — P. 51—77.
354. Г л у ш к о Г. С. Дифференциальное уравнение для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине // Турбулентные течения. — М.: Наука, 1970. — С. 37—44.
355. Г л у ш к о Г. С. Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 4. — С. 128—136.
356. K o v a s z n a y L. S. G. Structure of the turbulent boundary layer // Phys. Fluids. — 1967. — V. 10, N 9.
357. N e e V. W., K o v a s z n a y L. S. G. Simple phenomenological theory of turbulent shear flows // Phys. Fluids. — 1969. — V. 12, N 3.
358. С е к у н д о в А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомоделных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1971. — № 5. — С. 114—127.
359. B r a d s h a w P., F e r r i s s D. H., A t w e l l N. P. Calculation of boundary layers development using the turbulent energy equation // J. Fluid Mech. — 1968. — V. 28, N 3. — P. 593—616.
360. B r a d s h a w P. The understanding and prediction of turbulent flow // Aeronaut. J. — 1972. — V. 76, N 739. — P. 403—418.
361. B r a d s h a w P. The effect of mean compression or dilatation on the turbulence of supersonic boundary layers // J. Fluid Mech.; — 1974. — V. 63, N 3.
362. H a n j a l i c K., L a u n d e r B. E. A Reynolds-stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 52. — P. 609.
363. П е й т е л В. К., Р о д и В., Ш о й е р е р Г. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса: обзор // Аэрокосмическая техника. — 1986. — № 2. — С. 183—197.
364. S c h u b a u e r G. B. Turbulent processes as observed in boundary layer and pipe // J. Appl. Phys. — 1954. — V. 25. — P. 188—196.
365. C o l e s D. A model for flow in the viscous sublayer // Proceedings of the workshop on coherent structure of turbulent boundary layers. — Lehigh university, Bethlehem, Pa., 1978.
366. L a u n d e r B. E. Second moment closure: methodology and practice // Proc. Ecole d'Eté d'Analyse Numerique-Modelisation Numerique de la Turbulence, Clamart, France, 1982.

367. Wiegardt K., Tillmann W. On the turbulent friction layer for rising pressure // NACA TM 1314.— 1951.
368. Andersen P. S., Kays W. M., Moffat R. J. The turbulent boundary layer on a porous plate: an experimental study of the fluid mechanics for adverse free — stream pressure gradients // Dept. Mech. Eng., Thermosciences Div., Stanford Univ., Stanford, Calif.— Rept. HMT-15.— 1972.
369. Simpson R. L., Wallace D. B. Laminar-turbulent boundary layers: experiments on sink flows.— Project SQUID, Tech. Rept. SMU-I-PU, 1975.
370. Patel V. C., Head M. R. Reversion of turbulent to laminar flow // J. Fluid Mech.— 1968.— V. 34.— P. 371—392.
371. Badri Narayanan M. A., Ramjee V. On the criteria for reverse transition in a two-dimensional boundary layer flow // J. Fluid Mech.— 1969.— V. 35.— P. 225—241.
372. Jones W. P., Launder B. E. Some properties of sink — flow turbulent boundary layers // J. Fluid Mech.— 1972.— V. 56.— P. 337—351.
373. Launder B. E., Sharma B. I. Application of the energy dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc // Letters in Heat and Mass Transfer.— 1974.— V. 1.— P. 131—138.
374. Chien K.-Y. Predictions of channel and boundary-layer flow with a low-Reynolds-number turbulence model // AIAA J.— 1982.— V. 20, № 1.— P. 33—38.
375. Lam C. K. G., Bremhorst K. A. Modified form of the ($k - \epsilon$)-model predicting wall turbulence // J. Fluids Eng.— 1981.— V. 103.— P. 456—460.
376. Wilcox D. C., Rubesin W. M. Progress in turbulence modeling for complex flow fields including effects of compressibility // NASA Tech. Pap. 1517.— 1980.
377. Jones W. P., Launder B. E. The calculation of low-Reynolds number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat and Mass Transfer.— 1973.— V. 16, № 10.— P. 1119—1130.
378. Launder B. E. Progress in the modeling of turbulent transport // Von Karman Inst., Rhode — Saint Genese, France, Lecture Series 76.— 1975.
379. Турбулентность/Под ред. П. Брэдшоу.— М.: Машиностроение, 1980.
380. Goldman K. Heat transfer to supercritical water and other fluids with temperature-dependent properties // Nuclear engineering. Part I. Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.— 1954.— V. 50, № 11.
381. Госмен А. Д., Пан В. М., Рачел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости.— М.: Мир, 1972.
382. Marvin J. G. Turbulence modeling for computational aerodynamics // AIAA Pap.— 1982.— № 164.— P. 34.
383. Gessner F. B., Emery A. F. The numerical prediction of developing turbulent flow in rectangular ducts // Trans. ASME. J. Fluid Eng.— 1981.— V. 103, № 3.— P. 445—453.
384. Турбулентность: принципы и применения/Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена.— М.: Мир, 1980.
385. Mikatariyan R. R., McDana A. J. Analytical and experimental correlation of the HF-chemical laser flow // AIAA Pap.— 1975.— № 39.
386. Runchal A. K., Spalding D. B. Steady turbulent flow and heat transfer downstream of a sudden enlargement in a pipe of circular cross section // Wärme- und Stoffübertrag.— 1972.— V. 5, № 1.— P. 31—38.
387. Акатнов Н. И. О линейных масштабах турбулентности в полумпирической теории // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1974.— № 3.— С. 53—57.
388. Ng K. H., Spalding D. B. Turbulence model for boundary layers near walls // Phys. Fluids.— 1972.— V. 15, № 1.— P. 20—30.
389. Harlow F. H., Nakayama P. I. Turbulence transport equations // Phys. Fluids.— 1977.— V. 20, № 11.— P. 2323—2332.

390. Jones W. P., Launder B. E. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence // *Int. J. Heat and Mass Transfer.*— 1972.— V. 15, № 3.— P. 301—314.
391. Launder B. E., Spalding D. B. The numerical computation of turbulent flows // *Comput. Meth. Appl. Mech. and Eng.* 1974.— V. 3, № 2.— P. 269—289.
392. Chieng C. C., Launder B. E. On the calculation of turbulent heat transfer downstream from an abrupt pipe expansion // *Numer. Heat Transfer.*— 1980.— V. 3, № 2.— P. 189—207.
393. Amano R. S. On the calculation of turbulent heat and mass transport downstream from an abrupt pipe expansion // *AIAA Pap.*— 1982.— № 1269.
394. Detlev U. Anwendung des $(k - \varepsilon)$ -Turbulenzmodells auf die Rohreinlaufstromung // *Umlaufkolloq. Probl. Turbulenz*, Berlin, 1981.— Vortragssauszuge. Berlin, 1981.— P. 27.
395. Gooray A. M., Watkins C. B., Aung W. Numerical calculations of turbulent heat transfer downstream of rearward facing step // *Numer. Meth. Laminar. and Turbulent Flow.*— Proc. 2nd Int. Conf., Venice, 1981.— Swansea, 1981.— P. 639—651.
396. Pourahmadi F., Humphrey J. A. C. Prediction of curved channel flow with an extended $(k - \varepsilon)$ -model of turbulence // *AIAA J.*— 1983.— V. 21, № 10.— P. 1365—1373.
397. El Tahri S. H. $(k - \varepsilon)$ -equation for compressible reciprocating engine flows // *J. Energy.*— 1983.— V. 7, № 4.— P. 345—353.
398. Boyle D. R., Golay M. W. Measurement of a recirculating, two-dimensional, turbulent flow and comparison to turbulence model predictions. 1. Steady state case // *Trans. ASME. J. Fluids Eng.*— 1983.— V. 105, № 4.— P. 439—446.
399. Abou-Arab T. W., Abou-Ellaail M. M. M. Calculation of flow and heat transfer in pipes with a Reynolds stress model of turbulence // *Numer. Meth. Non-Linear Probl. Proc. Int. Conf.*, Swansea, 1980. V. 1.— Swansea, 1980.— P. 957—970.
400. Конвективный теплообмен: Методы и результаты исследований/Под ред. Б. С. Петухова.— М.: Ин-т высоких температур АН СССР, 1982.
401. Петухов Б. С., Поляков А. Ф., Максим П. Л., Ушпурас Е. В. Баланс энергии турбулентности, турбулентных касательных напряжений и турбулентных тепловых потоков при течении газа в трубах // *Конвективный теплообмен: Методы и результаты исследований.*— М.: Ин-т высоких температур АН СССР, 1982.— С. 6—28.
402. Rastogi A. W., Rodi W. Calculation of general three-dimensional turbulent boundary layers // *AIAA J.*— 1978.— V. 16, № 2.— P. 151—169.
403. Chambers J. L., Wilcox D. C. Critical examination of two-equation turbulence closure models for boundary layers // *AIAA J.*— 1977.— V. 16, № 6.— P. 821—828.
404. Попов В. Н. Влияние свободной конвекции на турбулентный перенос при течении жидкости в вертикальном канале // *Теплофиз. высоких температур.*— 1983.— Т. 21, № 3.— С. 515—521.
405. Lumley J. L. Turbulence modeling // *Trans. ASME J. Appl. Mech.*— 1983.— V. 50, № 4.— P. 1097—1103.
406. Ferziger J. H., Leslie D. C. Large eddy simulation: a predictive approach to turbulent flow computations // *AIAA Comput. Fluid. Dyn. Conf.*, Williamsburg, Va, 1979.— New York, N. Y., s. a.— P. 234—246.
407. Hirata M., Tanaka H., Kawamura H., Kasagi N. Heat transfer in turbulent flows // *Heat transfer*, 1982.— Proc. 17th Int. Conf., München, 1982.— V. 1.— Washington, 1982.— P. 31—57.
408. Haines A. B. Turbulence modeling // *Aeronaut. J.*— 1982.— V. 86, № 857.— P. 269—277.
409. Voke P. R., Collins M. W. Large-eddy simulation: retrospect and prospect // *Physicochem. Hydrodyn.*— 1983.— V. 4, № 2.— P. 119—161.

410. Петухов Б. С. Турбулентность в теории теплообмена // Пробл. докл. 6-й Всес. конф. по тепломассообмену. Ч. 1.— Минск, 1981.— С. 21—51.
411. Гогинш Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1982.— № 2.— С. 31—47.
412. Spalding D. B. A general theory of turbulent combustion // J. Energy.— 1978.— V. 2, № 1.— P. 16—23.
413. Мотулевич В. П. Тепло- и массообмен при физико-химических превращениях вещества в потоках газа // Пробл. докл. 6-й Всес. конф. по тепломассообмену. Ч. 1.— Минск, 1981.— С. 134—145.
414. Khalil E. E., Whitelaw J. H. Calculation of turbulent combusting flows // Acta astronaut.— 1979.— V. 6, № 7—8.— P. 1011—1015.
415. Fishburne E. S., Varma A. K. Investigations of chemical reactions in a turbulent media // Acta astronaut.— 1979.— V. 6, № 3—4.— P. 297—308.
416. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Расчет турбулентного диффузионного факела горения с учетом пульсаций концентрации и архимедовых сил // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1977.— № 1.— С. 30—40.
417. Кузнецов В. Р., Лебедев А. Б., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Анализ возможностей применения различных моделей турбулентности для описания диффузионного горения в струях и каналах // Хим. физ. процессов горения и взрыва. Горение газов и натуральн. топлив. Материалы 6-го Всес. симпози. по горению и взрыву. Алма-Ата, 1980.— Черноголовка: Ин-т химической физики АН СССР, 1980.— С. 29—32.
418. Зимонт В. Л., Мещеряков Е. А., Сабельников В. А. Модели турбулентного диффузионного факела, учитывающие влияние на горение пульсаций концентрации // Тр. IV чтений, посвящ. разраб. научн. наследия и развитию идей Ф. А. Цандера. Секц. теор. и констр. двигателей и летательных аппаратов.— М.: Изд-во МГУ, 1978.— С. 114—127.
419. Колесниченко А. В., Маров М. Я. К проблеме замыкания в теории турбулентных сдвиговых течений многокомпонентных смесей химически активных газов.— Ин-т прикл. математ. АН СССР. Препр.— 1983.— № 31.— 24 с.
420. Spiegler E., Wolfstein M., Manheimer-Timnat Y. A model of unmixedness for turbulent reacting flows // Acta astronaut.— 1975.— V. 3, № 3—4.— P. 265—380.
421. Evans J. S., Schexnayder C. J. Influence of chemical kinetics and unmixedness on burning in supersonic hydrogen flames // AIAA J.— 1980.— V. 18, № 2.— P. 188—193.
422. Arora R., Kuo K. K., Razdan M. K. Turbulent boundarylayer flow computations with special emphasis on the near-wall region // AIAA 5th Computational Fluid Dyn. Conf., Palo Alto, Calif., 1981.— New York, 1981.— P. 295—305.
423. Edelman R. B., Harsha P. T. Some observations of turbulent mixing with chemical reactions // Turbul. Combust. Techn. Pap. AIAA 15th Aerospace Sci. Meet.— 1977.— New York, N. Y., 1978.— P. 55—102.
424. Турбулентные течения реагирующих газов/Под ред. П. А. Либби и Ф. А. Уильямса.— М.: Мир, 1983.— 327 с.
425. Pope S. B. The application of PDF transport equations to turbulent reactive flows // J. Non-Equibr. Thermodyn.— 1982.— V. 7, № 1.— P. 1—14.
426. Сосинович В. А., Цыганов В. А. Описание процесса турбулентного смешения реагентов на основе уравнения для плотности вероятности масштабов // Инж.-физ. ж.— 1984.— Т. 46, № 2.— С. 219—225.
427. Varma A. K., Fishburne E. S., Donaldson C. du P. Aspects of turbulent combustion // Turbul. Combust. Techn. Pap. AIAA 15th Aerospace Sci. Meet. 1977.— New York, N. Y., 1978.— P. 117—140.

428. Libby P. A., Williams F. A. Some implications of recent theoretical studies in turbulent combustion // AIAA J.—1981.— V. 19, № 3.— P. 261—274.
429. Spalding D. B. The theory of turbulent reacting flows: a review // AIAA Pap.—1979.— № 213.— P. 14.
430. Lockwood F. C., Syed S. A. Consideration of the problem of combustion modelling for engineering application // Combust. Sci. and Technol.—1979.— V. 19, № 3—4.— P. 129—140.
431. Jones W. P., Whitelaw J. H. Calculation methods for reacting turbulent flows: a review // Combust. and Flame.—1982.— V. 48, № 1.— P. 1—26.
432. Spalding D. B. Chemical reactions in turbulent fluids // Physicochem. Hydrodyn.—1983.— V. 4, № 4.— P. 323—336.
433. Турбулентные сдвиговые течения. Т. 1, 2 // Под ред. Л. Дж. С. Брэдбери, Ф. Дурета, Б. Е. Лаундера, Ф. В. Шмидта, Д. Г. Уайтлоу — М.: Машиностроение, 1983.
434. Meier H. V., Rotta J. C. Experimental and theoretical investigations of temperature distributions in supersonic boundary layer // AIAA Pap.—1970.— № 744.
435. Плечер Р. Х. Конечно-разностный метод расчета турбулентного пограничного слоя с постоянными свойствами // Ракетная техника и космонавтика.—1969.— Т. 7, № 2.— С. 138—160.
436. Bradshaw P., Ferris D. H. Calculation of boundary layers development using the turbulent energy equation // J. Fluid Mech.—1967.— V. 28, № 3.— P. 593—616.
437. Карякин Ю. Е., Шаров В. Г. Конечно-разностный метод расчета турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости // Инж.-физ. ж.—1974.— Т. 26, № 2.— С. 298—304.
438. Карякин Ю. Е., Лапин Ю. В. Численный расчет характеристик турбулентного пограничного слоя в равновесно диссоциирующем воздухе // Труды ЛПИ им. М. И. Калинина.— Л.: ЛПИ, 1976.— № 352.— С. 32—38.
439. Баев В. К., Головичев В. И., Ясаков В. А. Двумерные турбулентные течения реагирующих газов.— Новосибирск: Наука, СО, 1976.
440. Келлер Х. Б., Себеси Т. Точный численный метод расчета потоков в пограничном слое. II. Двумерные турбулентные потоки // Ракетная техника и космонавтика.—1972.— Т. 10.— № 9.
441. Сафаров Р. А., Тирский Г. А. Применение феноменологических моделей к исследованию турбулентных пограничных слоев однородного и неоднородного газов // Турбулентные течения.— М.: Наука, 1977.— С. 42—54.
442. Игнатьев В. Н. О схеме повышенного порядка точности для расчета уравнений турбулентного пограничного слоя // Численные методы механики сплошной среды.—1972.— Т. 3, № 4.— С. 69—76.
443. Алексин Б. В. К расчету сжимаемого турбулентного пограничного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува/Под ред. Г. А. Тирского.— М.: МГУ, 1978.
444. Алексин В. А., Совершенный В. Д., Чикова С. П. Расчет турбулентного пограничного слоя на поверхностях с проницаемыми участками // Изв. АН СССР. МЖГ.—1978.— № 4.— С. 70—77.
445. Алексин В. А., Тирский Г. А., Шевелев Ю. Д. Численное исследование трехмерного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе // Труды VI Международной конференции по численным методам в гидродинамике.— Тбилиси, 1978.
446. Нехамкина О. А., Ротинян М. А. Расчет теплопередачи при турбулентном течении по трубам многоатомных газов // Инж.-физ. ж.—1977.— Т. 33, № 4.— С. 678—687.

447. И в а н о в А. А., Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. Об эффекте диффузионного разделения элементов при неизотермическом течении многокомпонентных химически равновесных газовых смесей в каналах // Теплофиз. высок. температур.— 1978.— Т. 16, № 2.— С. 322—331.
448. И в а н о в А. А., Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. Численное исследование тепло- и массообмена при течении по трубам многокомпонентных химически реагирующих газовых смесей // Теплообмен-VI. Т. 3.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1980.— С. 14—21.
449. Л ь в о в О. Н., Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. Тепло- и массообмен при ламинарном течении аммиака в обогреваемых круглых трубах в условиях развитой каталитической диссоциации на стенках // Теплофиз. высок. температур.— 1980.— Т. 18, № 2.— С. 327—333.
450. Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. К вопросу о расчете теплообмена при турбулентном течении по трубам четырехоксида азота // Теплофиз. высок. температур.— 1979.— Т. 17, № 2.— С. 361—365.
451. Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. Расчет турбулентного течения аммиака в круглых обогреваемых трубах при наличии каталитической диссоциации на стенках // Теплофиз. высок. температур.— 1982.— Т. 20, № 1.— С. 75—80.
452. И в а н о в А. А., Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. Расчет сопротивления и теплопередачи на начальном участке трубы на основе решения системы уравнений пограничного слоя и Навье—Стокса // Теплообмен-VI. Т. 1. Ч. 1.— Минск: Ин-т тепло- и массообмена АН БССР, 1980.— С. 83—87.
453. В и л е н с к и й В. Д., П е т у х о в Б. С., Х а р и н Б. Е. Теплообмен и сопротивление в круглой трубе при ламинарном течении газа с переменными свойствами. I. Метод расчета // Теплофиз. высок. температур.— 1969.— Т. 7, № 5.— С. 931—939.
454. K u m a r A., J a j n i k K. S. Internal separated flows at large Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1980.— V. 97, № 1.— P. 27—51.
455. B r a d y J. F., A c r i v o s A. Closed-cavity flows at moderate Reynolds number // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 115.— P. 427—442.
456. A c r i v o s A., S c h r e d e r M. Steady flow in a sudden expansion at high Reynolds numbers // Phys. Fluids.— 1982.— V. 25, № 6.— P. 923—930.
457. E a g l e s P. M., S m i t h P. T. The influence of nonparallelism in channel flow stability // J. of Eng. Math.— 1980.— V. 14, № 3.— P. 219—237.
458. П л о т к и н А. Расчеты спектральным методом некоторых отрывных ламинарных течений в каналах // Аэрокосмическая техника.— 1983.— № 7.
459. K w o n O. K., P l e t c h e r R. H., L e w i s J. P. Prediction of sudden expansion flows using the boundary-layer equation // Trans. ASME. J. Fluids Eng.— 1984.— V. 106, № 3.— P. 285—291.
460. W i l l i a m s P. J. A reverse flow computation in the theory of self-induced separation // Lect. Notes in Phys.— 1975.— V. 35.— P. 445—451.
461. D a v i s R. F., R u b i n S. G. Non-Navier — Stokes viscous flow computations // Comput. and Fluids.— 1980.— V. 8, № 1. P. 101—131.
462. R e i h n e r T. A., F l u g g e - L o t z I. The interaction of a shock wave with a laminar boundary layer // Int. J. Nonlinear Mech.— 1968.— № 3.— P. 173—199.
463. К у з н е ц о в А. Е., Н е х а м к и н а О. А., С т р е л е ц М. Х. О численном моделировании дозвуковых течений в каналах с внезапным расширением на основе приближения узкого канала // Теплофиз. высок. температур.— 1986.— Т. 24, № 4.
464. M a s a g n o E. O., H u n g T. K. Computational and experimental study of a capative annular eddy // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 28, № 1.— P. 43—64.
465. D u r s t F., M e l l i n g A., W h i t e l a w J. H. Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion // J. Fluid Mech.— 1974.— V. 64.— № 1.— P. 111—128.

466. Петухов Б. С., Майданик В. Н., Новиков Г. А. Экспериментальное исследование теплоотдачи при турбулентном течении в круглой трубе неравновесно диссоциирующего газа // Теплофиз. высок. температур.— 1971.— Т. 9, № 2.— С. 316—319.
467. Ковалев С. Д., Колыхан Л. И., Тверковкин Б. Е., Уютов Г. И., Якушев А. Н. Экспериментальное исследование теплообмена при турбулентном течении в круглой трубе химически неравновесной четырехокси азота // Изв. АН БССР. Сер. ФЭН.— 1971, № 4.— С. 41—47.
468. Петухов Б. С., Комендантов А. С., Смирнов Ю. Б., Верегина Л. Т., Бурдуин М. Н., Шиков В. К. Теплоотдача при турбулентном течении диссоциирующей четырехокси азота в круглых трубах // Теплофиз. высок. температур.— 1981.— Т. 19, № 3.— С. 543—551.
469. Малько М. В., Нестеренко В. Б. Кинетика и механизм химических реакций в диссоциирующем теплоносителе — четырехокси азота.— Минск: Наука и техника, 1974.— 205 с.
470. Термодинамические и переносные свойства химически реагирующих газовых систем/Под ред. А. К. Красина, В. Б. Нестеренко, Ч. 1.— Минск: Наука и техника, 1967.
471. Петухов Б. С., Шиков В. К. Теплообмен и сопротивление при течении в трубах диссоциирующего азотного тетраоксида. Исследование турбулентного течения // Теплофиз. высок. температур.— 1977.— Т. 15, № 5.— С. 1034—1046.
472. Курганов В. А., Гладунцов А. И. Эффекты изменения теплофизических свойств и кризис турбулентного теплообмена при нагревании диссоциирующего аммиака в каталитических трубах // Вопросы конвективного и радиационно-кондуктивного теплообмена.— М.: Наука, 1980.— С. 14—177.
473. Курганов В. А., Гладунцов А. И. Некоторые результаты экспериментального исследования теплоотдачи при нагревании в трубах турбулентного потока газа, каталитически диссоциирующего на стенке // Теплофиз. высок. температур.— 1977.— Т. 15, № 1.— С. 84—95.
474. Edwards J. W., Small P. A. Kinetics of the pyrolysis of chlorodifluoromethane // Industr. and Eng. Chemistry. Fundamentals.— 1965.— V. 4, № 4.— P. 396—400.
475. Gozzo F., Patric C. R. The thermal decomposition of chlorodifluoromethane // Tetrahedron.— 1966.— V. 22.— P. 3329—3336.
476. Atkinson V. O. The thermal decomposition of tetrafluoroethylene // J. Chemical Society.— 1957.— № 5.— P. 2086—2113.
477. Политанский С. Ф. Термические превращения фторметанов. III. Образование перфторпропена при пиролизе фтороформа // Кинетика и катализ.— 1969.— Т. 10, № 3.— С. 500—505.
478. Евдокимов С. Е., Нехамкина О. А., Провалов В. С., Стрелец М. Х. Оптимизация трубчатых реакторов пиролиза // Теоретические основы химической технологии.— 1986.— Т. 20, № 6.— С. 748—754.
479. Борисов И. И., Наумов В. В., Нехамкина О. А., Рейсиг В. А., Стрелец М. Х. Исследование тепло- и массообмена при химически неравновесном течении диссоциированного воздуха в интенсивно охлаждаемых каналах // Теплофиз. высок. температур.— 1985.— Т. 23, № 4.— С. 733—741.
480. Душин В. К., Лосев С. А. Кинетика рекомбинации двуокси азота, серы и углерода при течении газа в сопле // Науч. труды Ин-та механики МГУ.— № 43.— М.: МГУ, 1976.
481. Кондратьев В. Н. Константы скоростей газозных реакций.— М.: Наука, 1970.
482. Baulch D. Z., Drysdale D. D., Horne D. G. Evaluated data for high temperature reactions.— London: Butterworth's, 1973.

483. Нехамкина О. А., Стрелец М. Х., Шиков В. К. О расчете теплообмена при турбулентном течении в обогреваемых трубах диссоциирующего азотного тетроксидов // Теплофиз. высок. температур.— 1980.— Т. 18, № 1.— С. 216—217.
484. Колыхан Л. И., Нестеренко В. Б. Теплообмен в диссоциирующем теплоносителе — четырехокиси азота.— Минск: Наука и техника, 1977.
485. Курганов В. А., Гладунцов А. И. Ламинаризация течения и кризис теплоотдачи при интенсивном нагревании турбулентного потока газа, эндотермически диссоциирующего на стенке // Теплофиз. высок. температур.— 1977.— Т. 15, № 6.— С. 1230—1240.
486. Амбразьявичюс А. Теплообмен при закалке газов.— Вильнюс: Мокслас, 1983.
487. Emanuel G. Analytical model for continuous chemical laser // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer.— 1971.— V. 11.— P. 1481—1520.
488. Крутова В. Г., Ораевский А. Н., Степанов А. А., Щеглов В. А. Численный анализ химического лазера непрерывного действия диффузионного типа при произвольной степени диссоциации молекулярного фтора // Квант. электроника.— 1976.— Т. 3, № 9.— С. 1919—1931.
489. Tripodi R., Coulter L. J., Bronfin B. R., Cohen N. A. Coupled two-dimensional computer analysis of CW chemical lasers // AIAA Pap.— 1974.— № 224.
490. Степанов А. А., Щеглов В. А. О методе последовательного расчета непрерывного HF-лазера диффузионного типа на основе уравнений Навье — Стокса // ФИАН СССР.— Препр., 1976.— № 182.
491. Sentman L. H., Ruchmore W. Computationally efficient, rotational nonequilibrium CW chemical laser model // AIAA J.— 1981.— V. 19, № 10.— P. 1323—1332.
492. Бай Ш. и. Динамика излучающего газа.— М.: Мир, 1968.
493. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Разностная схема на подвижных сетках для решения уравнений вязкого газа // Ж. вычисл. мат. и мат. физ.— 1979.— Т. 19, № 1.— С. 174—188.
494. Wilson L. E. Deuterium fluoride CW chemical lasers // Proc. of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers.— 1976.— V. 76.— P. 51—58.
495. Wilson L. E., Hook D. L. Deuterium fluoride CW chemical lasers // AIAA Pap.— 1976.— № 344.
496. Бассина И. А., Дорот В. Л., Стрелец М. Х. Расчет пограничного слоя в сопле непрерывно действующего сверхзвукового химического лазера // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1979.— № 3.— С. 120—126.
497. Бассина И. А., Дорот В. Л., Стрелец М. Х. Расчет сопротивления и теплообмена при течении многокомпонентной химически неравновесной смеси газов в сверхзвуковом сопле с проницаемыми стенками при наличии вдува // Теплофиз. высок. температур.— 1981.— Т. 19, № 6.— С. 1203—1207.
498. Бассина И. А., Дорот В. Л., Стрелец М. Х. О влиянии поперечной кривизны канала на характеристики химически неравновесного пограничного слоя в осесимметричном сопле Лавалья // Эксперим. и теор. исслед. тепломассопереноса при течении диссоциирующих газов в каналах.— Минск: Ин-т ядерной энергетики АН БССР, 1983.— С. 144—149.
499. Ferrell J. E., Kendall R. M., Tong H. Recombination effects in chemical laser nozzles/AIAA Pap.— 1973.— № 643.— P. 12.
500. Nagai C. K., Carlson L. W., Giedt R. K., Klopotek R. D. Heat-transfer characteristics of an advanced DF* chemical laser // AIAA Pap.— 1974.— № 684.— P. 12.
501. Mikatarian R. R., McDanal A. J. Analytical and experimental correlation of the HF-chemical laser flow // AIAA Pap.— 1975.— № 39.
502. Zelazny S. W., Driscoll R. J., Raymond J. W., Blaue J. A., Solomon W. C. Modeling DF/HF CW chemical lasers: An

- examination of key assumptions // AIAA J.—1978.— V. 16, № 4.— P. 297—304.
503. Лавров А. В., Поспелов В. А. Смещение плоских ламинарных струй релаксирующего газа с учетом излучения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 3.— С. 137—142.
 504. Лавров А. В., Поспелов В. А., Федотов А. В., Шур М. Л. Численный анализ режима генерации HF-химического лазера непрерывного действия // Физ. горения и взрыва.— 1979.— Т. 15, № 1.— С. 89—97.
 505. Степанов А. А., Щеглов В. А. Влияние эффектов смещения на энергетические характеристики автономного химического HF-лазера непрерывного действия // Квант. электроника.— 1979.— Т. 6, № 4.— С. 747—758.
 506. Головичев В. И. Энергетические характеристики HF-химикогазодинамического лазера диффузионного типа // Исследование рабочего процесса газодинамических и химических лазеров.— Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР, 1979.— С. 146—158.
 507. Степанов А. А., Щеглов В. А. Об особенностях кольцевой модели химического непрерывного HF-лазера на «холодной» реакции // Ж. техн. физики.— 1980.— Т. 50, № 3.— С. 557—563.
 508. Quan V., Persselin S. F., Yang T. T. Computation of reacting flow field with radiation interaction in chemical lasers // AIAA Pap.— 1982.— № 402.— P. 7.
 509. Крутова В. Г., Степанов А. А., Щеглов В. А., Щетинкина Т. А. Об автономном варианте химического DF-лазера непрерывного действия // Ж. техн. физики.— 1985.— Т. 55, № 12.— С. 2354—2360.
 510. Коноплев Н. А., Степанов А. А., Щеглов В. А. Численный двумерный анализ кольцевой модели DF—CO₂—НХЛ с учетом эффектов смещения реагентов // Ж. ПМТФ.— 1985.— № 4.— С. 3—9.
 511. Shackelford W. L., Witte A. B., Broadwell J. E., Trost J. E., Jacob T. A. Experimental studies of chemically reactive (F+H₂) flow in supersonic free jet mixing layers // AIAA Pap.— 1973.— № 640.
 512. Rhodes R. P., Harsha P. T., Peters C. E. Turbulent kinetic energy analysis of hydrogen-air diffusion flames // Acta Astronaut.— 1974.— V. 1.— P. 443—470.
 513. Viacelli J. A. A computing method for incompressible flows bounded by moving walls // J. Comput. Phys.— 1971.— V. 8, № 1.— P. 119—143.
 514. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface // Phys. Fluids.— 1968.— V. 8, № 12.— P. 2182—2189.
 515. Кузнецов А. Е. Двухшаговая схема расщепления для расчета стационарных дозвуковых течений однородного вязкого газа в каналах // Числ. мет. мех. сплош. среды.— 1986.— Т. 17, № 3.— С. 91—97.
 516. Полежаев В. И. Нестационарная ламинарная тепловая конвекция в замкнутой области при задании потока тепла // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 4.— С. 109—117.
 517. Полежаев В. И. Гидродинамика, тепло- и массообмен при росте кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Мех. жидк. и газа.— ВИНТИ, 1984.— Т. 18.— С. 198—269.
 518. Leopardi E., Reizes J. A. Natural convection in compressible fluids with variable properties // Numerical Methods in Thermal Problems. Proc. 1st. Int. Conf., Swansea, 1979.— Swansea, 1979.— P. 297—306.
 519. Жмакин А. И., Ипатова И. П., Макаров Ю. Н., Фурсенко А. А. Математическое моделирование газодинамических процессов в проточных газопитахсальных реакторах.— Физ.-техн. ин-т АН СССР. Препр.— 1985.— № 970.

INTERNAL GAS MIXTURES FLOWS

by Yu. V. Lapin and M. Kh. Strelets

Information about the authors

Yu. V. Lapin — Professor, Dr. of Physics and Mathematics. Member of National Theoretical and Applied Mechanics Committee. Generally recognized authority on Reacting Flows Dynamics and Turbulence Theory, Author of the wellknown monograph «Turbulent boundary layer in supersonic gas flows», Moscow, «Science», 1971 and 1984.

M. Kh. Strelets—Dr. of Physics and Mathematics. One of the leading specialists on Computational Gas Dynamics, Reacting Flows Dynamics and Turbulence Theory.

CONTENTS

Chapter 1. Governing equations of viscous multicomponent chemically reacting flows

- § 1. Introduction
- § 2. Gasdynamic equations. Flux vectors
Gasdynamic equations, written in terms of the flux vectors. Stress tensor and deformation tensor. Diffusive fluxes and diffusion coefficients in multicomponent gas mixtures. Stephan — Maxwell equations. Heat flux and heat conductivity coefficient in multicomponent gas mixtures. Various forms of governing equations of multicomponent reacting flows
- § 3. Short information on Chemical Kinetics

Chapter 2. Mathematical models and numerical methods for viscous internal gas mixtures flows

- § 4. Introduction
- § 5. Modelling of internal flows on the base of full Navier-Stokes equations for multicomponent chemically reacting gas mixtures
Nondimensional form of governing equations. Similarity criteria. Boundary conditions (conditions on the wall; symmetry conditions; inlet and outlet conditions). Finite-difference schemes for full Navier-Stokes equations (general characteristic of the methods; peculiarities of the methods for low speed compressible flows and flows with high rate physico-chemical processes calculations; methods of Stephan-Maxwell equations solving for multicomponent gas mixtures flows)
- § 6. Approximate models of internal gas mixtures flows Asymptotic models for low Mach number flows with complex structure (Bussinesque's approximation and the model of incompressible fluid; the model of low Mach number flow with high density gradients; numerical methods for subsonic flows calculations on the base of asymptotic models). Parabolized models for internal viscous gas mixtures flows (boundary layer approximation; slender channel approximation; parabolized Navier-Stokes equations; numerical methods for internal flows calculation on the base of the parabolized models). Approximate models for physico-chemical processes in gas mixtures

Chapter 3. Turbulent flows of gas mixtures

- § 7. On turbulent flows modelling problems
- § 8. Methods of turbulent flows description: Reynolds and Favre averaging procedure
- § 9. Equations of multicomponent chemically reacting gas mixtures turbulent motion
Equations for the first moments. Equations for the second moments
- § 10. Turbulent boundary layer in multicomponent reacting gas mixtures flows. Turbulent boundary layer structure. Boundary layer equations

- § 11. Semiempirical models for the first moments equations enclosure. Turbulent stress tensor. Bussinesque's hypothesis. Hypothesis of turbulent transfer mechanism locality. Prandtl's formula. Karman's formula. Molecular and turbulent transfer interaction near the wall (effective viscosity). Turbulence models for outer region of turbulent boundary layer
- § 12. Clauser's model modification for equilibrium and nonequilibrium boundary layers
Turbulent viscosity in equilibrium turbulent boundary layers. Equilibrium turbulent boundary layers structure. Nonequilibrium boundary layers.
- § 13. Semiempirical models for the second moments equations enclosure. Turbulent kinetic energy transfer equation. Turbulent energy dissipation transfer equation. Experimental data on turbulence characteristics near the wall. Two — parametric $k - \epsilon$ models of turbulence
- § 14. Some internal turbulent flows investigations data
- § 15. Turbulent fluxes of mass and energy. Eddy and effective heat conductivity and diffusion in boundary layer
- § 16. Numerical methods for turbulent gas mixtures flows calculation

Chapter 4. Subsonic flows in plane and axisymmetric channels

- § 17. Introduction
- § 18. Numerical method for chemically reacting flows calculation on the base of slender channel approximation
Governing equations transformation. Finite-difference scheme and numerical algorithm for chemically nonequilibrium flows. Modification for equilibrium flows. Turbulent flows calculation
- § 19. Boundaries of applicability of slender channel approximation. *Nonisothermal flows in tubes with constant cross — section*. Flows in tubes with distributed porous injection and suction. Flows in channels with sudden expansion. Comparison of numerical and experimental data

Chapter 5. Flows in supersonic continuous-wave (CW) chemical laser's cavity

- § 20. Introduction
- § 21. Mathematical model of the laminar flow in HF — CW chemical laser's cavity based on the full Navier-Stokes equations
The main physical assumptions. Governing equations and boundary conditions
- § 22. Numerical method
Governing equations splitting on the space directions and physical processes. Approximate factorization implicit finite-difference scheme and numerical algorithm. Validity of mathematical model and efficiency of numerical algorithm evaluation
- § 23. Boundaries of applicability of the slender channel approximation for modelling of the processes in HF — CW chemical laser's cavity.
Laminar regime of the flow. Turbulent regime of the flow

Chapter 6. Low Mach number internal flows with high density gradients

- § 24. Introduction
- § 25. Numerical methods for low Mach number flows calculation on the base of asymptotic (zero Mach number) models
Finite-difference scheme and numerical algorithm for steady-state flows calculation. Finite-difference scheme and numerical algorithm for unsteady flows calculation
- § 26. Boundaries of applicability of low Mach number asymptotic models
The model for low Mach number flows with high density gradients (unsteady natural convection in enclosures; steady-state forced convection in channels). Bussinesque's approximation (natural convection in enclosures; mixed convection of binary gas mixtures)

Bibliography — 519

Figures — 120